Exercice 1 – Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Étudier le sens de variation de f.

3. a. Étudier le signe de la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = f(x) - \ln(x)$.

b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

4. a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $e^t \geqslant t\,e^{t/2}$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$.

5. Donner un développement limité de $f(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 1.

6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer par récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x > 0$,

$$f(x) = e^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{x^{k+1}} - e \sum_{k=0}^{n-1} k! + n! \int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}}\,dt$$

(par convention, les sommes du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ sont nulles pour $n = 0$).

7. Montrer que F est bornée sur $]0{,}1]$ et en déduire que $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 2 – Polynômes et étude d'une suite définie par récurrence

Soient p un entier supérieur ou égal à 3 et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On définit le polynôme

$$P(X) = X^p + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_p[X].$$

Première partie

1. On suppose que P possède k racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{R}$. En appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer que $k \leqslant 4$.

2. Donner un exemple de polynôme P de la forme précédente ayant exactement quatre racines réelles deux à deux distinctes.

3. Dans cette question, $a = b = 0$, $c = 1$ et $p = 2n$ où n est un entier, $n \geqslant 2$.
Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^{2n}+1$.

Deuxième partie

Dans cette partie, $p = 3$, $a = -3$, $b = 2$ et $c = 0$. On identifie P et la fonction polynomiale qui lui est associée. On souhaite étudier, en fonction de certaines valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = P(u_n)$.

1. Déterminer les points fixes de P, c'est-à-dire les réels x tels que $P(x) = x$.
Que dire de (u_n) si α est l'une de ces valeurs ?

2. Établir le tableau de variations de P et le tableau de signe de la fonction $x \mapsto P(x) - x$.
Représenter sur un même graphique les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto P(x)$.

3. On suppose $\alpha < 0$. Montrer que $u_n < 0$ pour tout n et que (u_n) décroît. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Adapter cette méthode lorsque $\alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

4. On suppose que $1 < \alpha < 2$. Quel est le signe de u_1 ? En déduire la limite de (u_n).

5. On suppose que $0 < \alpha < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $0 < u_n < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est croissante et en déduire la limite de (u_n).

Exercice 3 – Étude de séries

Première partie

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln(1+t) - \ln(t)}{t^2}\, dt.$$

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.

2. En effectuant soigneusement le changement de variable $t = 1/x$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \ln(1+x)\, dx.$$

3. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \ln(1+x)\, dx.$

4. Conclure que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 2\ln(2) - 1.$

Deuxième partie

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = \frac{\ln(1+n) - \ln(n)}{n^2}.$$

1. Déterminer un équivalent de x_n et montrer que $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ converge. On note S sa somme.

2. Étudier le sens de variation de la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(1+t) - \ln(t)}{t^2}$$

sur $[1, +\infty[$.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$x_{n+1} \leqslant u_n \leqslant x_n \leqslant u_{n-1}.$$

4. En déduire un équivalent de u_n.

5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=m+1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=m+1}^{+\infty} x_n \leqslant \sum_{n=m}^{+\infty} u_n.$$

6. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\frac{1}{m+1}} \ln(1+x)\, dx \leqslant \sum_{n=m+1}^{+\infty} x_n \leqslant \int_0^{\frac{1}{m}} \ln(1+x)\, dx.$$

7. En calculant les intégrales précédentes, puis en effectuant un développement limité, montrer que

$$\sum_{n=m+1}^{+\infty} x_n \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2m^2}.$$

8. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $m(\varepsilon)$ le plus petit des entiers $m \geqslant 1$ tels que

$$0 \leqslant S - \sum_{n=1}^{m} x_n \leqslant \varepsilon.$$

Justifier l'existence de $m(\varepsilon)$, puis écrire un programme en Python permettant de le déterminer, à 1 près, pour ε assez petit. Proposer, sans justification, une estimation de $m(\varepsilon)$ en fonction de ε, pour ε assez petit. Tester cette estimation numériquement.

Exercice 4 – Suites définies par récurrence et algèbre linéaire

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 2w_n + a \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n - 2w_n + b \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + 3w_n + c \end{cases}$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

On définit aussi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on note C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de P.

1. Calculer AC_1, AC_2 et AC_3. Que remarque-t-on ?

2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

3. Donner, sans calcul supplémentaire, une relation entre A, P, P^{-1} et la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de D^n, P et P^{-1}.

5. Expliciter A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n = A^n X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k B.$$

7. Dans cette question, on suppose que $B = (I_3 - A)X_0$.
Montrer que les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont constantes.

8. **a.** Montrer que, pour qu'il existe $U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$U = AU + B, \tag{1}$$

il faut et il suffit que

$$a - 2b - c = 0. \tag{2}$$

b. Dans ce cas, déterminer l'ensemble des matrices-colonnes $U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant (1).

9. On fixe (a,b,c) vérifiant (2), et $U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $U = AU + B$.

a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} - U = A\,(X_n - U).$$

b. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de X_n en fonction de A^n, X_0 et U.

c. En raisonnant sur les composantes de $P^{-1}(X_0 - U)$, montrer que, pour que les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) soient bornées, il faut et il suffit que $B = (I_3 - A)X_0$, et que dans ce cas, elles sont constantes.

Exercice 5 – Deux équations dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On note $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$) le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices-colonnes (resp. des matrices carrées) à deux lignes et à coefficients réels. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^2$ et I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Première partie

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = I_2$.

1. $\mathcal{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

2. Soient $M \in \mathcal{R}$ et $P \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $P\,M\,P^{-1} \in \mathcal{R}$.

3. Déterminer l'ensemble des matrices diagonales qui appartiennent à $\mathcal{R}$.

Dans la suite de cette partie, A désigne un élément de $\mathcal{R}$, et u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.

4. Quel type de transformation géométrique est l'application u ?

5. Montrer que $(u - \mathrm{Id}) \circ (u + \mathrm{Id})$ est l'application nulle.

6. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$.

7. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est égale soit à I_2, soit à $-I_2$, soit à

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer alors : $A = I_2$ ou $A = -I_2$ ou il existe $P \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

8. Conclure que $\mathcal{R} = \{I_2, -I_2\} \cup \{PDP^{-1};\ P \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R})\}$.

9. Un exemple : soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $A \in \mathcal{R}$. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est D.

b. Déterminer la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}$ choisie.

c. Décrire géométriquement l'application linéaire u dans ce cas.

Deuxième partie

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = I_2$ et $A - I_2$ soit inversible.

1. Reprendre les questions **1** à **3** de la première partie pour l'ensemble $\mathcal{S}$.

Dans la suite de cette partie, A désigne un élément de $\mathcal{S}$, et u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.

2. Montrer que $A^2 + A + I_2$ est la matrice nulle, et donc que $u^2 + u + \mathrm{Id}$ est l'application nulle.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. On va montrer que $(x, u(x))$ est libre. Soient λ et μ deux réels tels que $\lambda\, x + \ \mu\, u(x) = (0, 0)$.

a. On suppose $\mu \neq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \alpha\, x$.

b. En considérant le vecteur $u^2(x) + u(x) + x$, montrer que $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

c. Aboutir à une contradiction.

d. Conclure.

4. Montrer que $(x, u(x))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

5. Écrire la matrice de u dans cette base.

6. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$.

Exercice 6 – Étude d'un endomorphisme

Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles) et F le sous-ensemble de E suivant :

$$F = \{f : x \mapsto (a\,x+b)\cos(x) + (c\,x+d)\sin(x);\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. On note $f_1 : x \mapsto x\cos(x)$, $f_2 : x \mapsto \cos(x)$, $f_3 : x \mapsto x\sin(x)$, $f_4 : x \mapsto \sin(x)$.

Montrer que la famille (f_1,f_2,f_3,f_4) est une base de F (*indication : pour l'aspect « libre », on pourra évaluer une combinaison linéaire de f_1, f_2, f_3 et f_4 en certains réels bien choisis*).

3. Soit D l'application définie sur F par : pour tout $f \in F$, $D(f) = f'$, où f' désigne la fonction dérivée de f. Montrer que D est un endomorphisme de F.

4. Écrire la matrice A de D dans la base (f_1,f_2,f_3,f_4).

5. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$. Montrer que D est un automorphisme de F. Déterminer $\mathrm{Im}(D)$.

6. Calculer A^2, A^3 et A^4 et montrer que $A^4+2A^2+I_4 = 0$ (I_4 est la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$).

7. En déduire la matrice A^{-1}.

8. Soit $f : x \mapsto (a\,x+b)\cos(x) + (c\,x+d)\sin(x) \in F$. Donner l'expression explicite de $D^{-1}(f)$.

9. Que représente $D^{-1}(f)$ par rapport à f ?

Exercice 7 – Produit scalaire, système linéaire

Soient $(\lambda,\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ et f l'application définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$\forall\, x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall\, y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = \lambda\, x_1y_1 + \mu\, x_2y_2 + \gamma\, x_3y_3.$$

1. On suppose que λ, μ et γ sont strictement positifs. Montrer que f est un produit scalaire.

2. On suppose par exemple que $\lambda \leqslant 0$. Montrer que f n'est pas un produit scalaire.

Dans la suite de cet exercice, on choisit $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\gamma = 3$. Ce qui précède montre que f est un produit scalaire, et l'on note, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $(x\,|\,y)$ au lieu de $f(x,y)$.

3. Soient $u \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{Vect}(u,v)$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$; montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $x \in F^\perp$.

(ii) $(x\,|\,u) = (x\,|\,v) = 0$.

4. On choisit $u = (a,-2,2)$, $v = (1,1,b)$, où a et b sont deux réels. En notant $x = (x_1,x_2,x_3)$, montrer que la propriété (ii) ci-dessus équivaut au système

$$\begin{cases} a\,x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3b\,x_3 = 0 \end{cases}$$

On note A la matrice de ce système linéaire.

5. a. Selon les valeurs de a et b, déterminer la forme échelonnée réduite par lignes de A.

b. Selon les valeurs de a et b, déterminer le rang du système précédent et le résoudre.

6. Déterminer une base orthonormée de F pour le produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$, lorsque $a = b = 0$.

Exercice 8 – Calcul de déterminant

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour tout entier naturel non nul n, on note $D_n(\alpha)$ le déterminant d'ordre n

$$D_n(\alpha) = \begin{vmatrix} 1+\alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+\alpha & \alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 1+\alpha & \alpha \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1+\alpha \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que $D_n(\alpha) = \det(M)$ où $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ avec, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1+\alpha & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i = j+1 \\ \alpha & \text{si } i = j-1 \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

1. Calculer $D_1(\alpha)$ et $D_2(\alpha)$.

2. À l'aide de développements par rapport aux lignes et/ou colonnes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D_{n+2}(\alpha) = (1+\alpha)D_{n+1}(\alpha) - \alpha\, D_n(\alpha).$$

3. Écrire et résoudre l'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

4. En déduire une expression simple de $D_n(\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On sera amené à distinguer plusieurs cas puis à déterminer une même formule convenant pour les différents cas.

5. Retrouver l'expression précédente en raisonnant par récurrence.

6. Pour quelles valeurs de α la suite $(D_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ? Dans ce cas, déterminer sa limite.

Exercice 9 – Probabilités : tirages dans une urne

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant n$,

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

On pourra raisonner par récurrence sur n et utiliser la formule de Pascal.

2. En choisissant judicieusement des valeurs particulières de p dans la relation précédente, donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k, \quad \sum_{k=1}^{n} k(k-1), \quad \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2).$$

Dans la suite, on fixe un entier $n \geqslant 2$. On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément deux jetons au hasard. On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux nombres tirés, et Y la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres tirés.

3. Soit j un entier tel que $2 \leqslant j \leqslant n$; montrer que $P(Y \leqslant j) = \binom{j}{2} \Big/ \binom{n}{2}$.

4. En déduire, pour $j \geqslant 3$ (avec $n \geqslant 3$), une expression de $P(Y = j)$ sans coefficients du binôme. Vérifier que la formule obtenue est encore valable pour $j = 1$ et $j = 2$, quel que soit $n \geqslant 2$.

5. Soit i un entier tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$; déterminer $P(X \geqslant i)$ et $P(X = i)$. Vérifier que la formule donnant $P(X = i)$ est encore valable pour $i = n$.

6. Déterminer la loi du couple (X, Y) et retrouver les résultats des deux questions précédentes. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer $P(X = 1 \,|\, Y = n)$.

7. Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y. En déduire que

$$E(n+1-X) = E(Y) \quad \text{et} \quad V(n+1-X) = V(Y).$$

Exprimer $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

8. Exprimer alors $E(X)$ et $E(Y)$ en fonction de n. On utilisera le résultat de la question **2**.

9. Déterminer $E(Y(Y-2))$, puis exprimer $E(Y^2)$, $V(X)$ et $V(Y)$ en fonction de n.

Correction disponible fin juillet à l'adresse : https ://padlet.com/aurelien_monteillet/dl_2018_2019