7 - Résolution de problème

RP01. Flux de photons

La puissance $\mathcal{P}$ de la lampe représente l'énergie lumineuse émise par unité de temps par celle-ci. En divisant par $E_{ph} = h\nu$ l'énergie d'un photon, avec ν la fréquence du photon, on en déduit le nombre de photons $\dot{N}$ émis par unité de temps :

$$\dot{N} \times E_{ph} = P \quad \Rightarrow \quad \dot{N} = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc}$$

Pour une lumière orange, on peut retenir une longueur d'onde $\lambda = 600 \times 10^{-9}$ m :

$$\dot{N} = \frac{100 \times 600 \times 10^{-9}}{6,63 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^{8}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{N} = 3,0 \times 10^{20} \text{ photons/s}}$$

RP02. Autonomie d'une lampe de poche

Démarche :

→ L'énergie $\mathcal{E}$ fournie par la lampe est le produit de sa puissance $\mathcal{P}$ par la durée T de fonctionnement, l'autonomie recherchée.

→ L'énergie lumineuse fournie est liée au nombre N de photons émis, nombre lui-même lié au nombre n_e d'électrons qui vont circuler dans la jonction.

→ Les électrons libérés sont eux-mêmes liés au nombre de moles de zinc n_{Zn}, présent dans les piles *via* une demi-réaction d'oxydo-réduction.

Il reste maintenant à remonter les étapes.

Calculs :

→ Connaissant la masse de zinc, on en déduit le nombre de moles de zinc au sein des piles :

$$n_{Zn} = \frac{m_{Zn}}{M_{Zn}}$$

→ La demi-équation d'oxydation du zinc s'écrit : $Zn_{(s)} = Zn^{2+} + 2e^-$, ce qui donne pour le nombre de moles d'électrons :

$$n_e = 2n_{Zn} = \frac{2m_{Zn}}{M_{Zn}}$$

→ En considérant un rendement proche de l'unité, on détermine le nombre de photons émis :

$$N_{ph} = n_{ph} \times \mathcal{N}_a = n_e \mathcal{N}_a \quad \Rightarrow \quad N_{ph} = \frac{2m_{Zn}}{M_{Zn}} \times \mathcal{N}_a$$

→ On multiplie alors l'expression obtenue par l'énergie d'un photon de longueur d'onde λ :

$$\mathcal{E} = N_{ph} \times \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{2m_{Zn}}{M_{Zn}} \times \frac{hc}{\lambda} \times \mathcal{N}_a$$

→ On en déduit alors l'autonomie T de la pile qui délivre une puissance $\mathcal{P}$:

$$T = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{P}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m_{Zn}}{M_{Zn}} \times \frac{hc}{\lambda} \times \frac{1}{\mathcal{P}} \times \mathcal{N}_a$$

Application numérique :

Pour une lumière visible, on peut retenir une longueur d'onde $\lambda = 650$ nm.

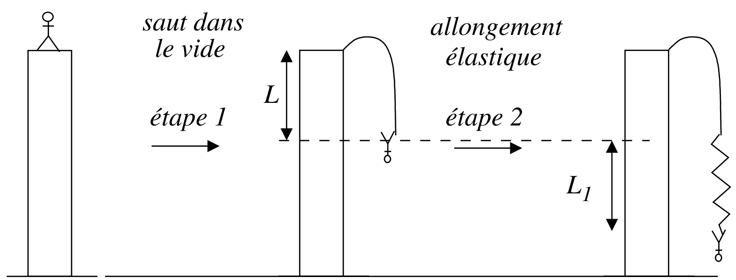
$$T = \frac{2 \times 3 \times 30}{65} \times \frac{6,62 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^{8}}{6,5 \times 10^{-7}} \times \frac{1}{50} \times 6,02 \times 10^{23}$$

$$T = 1,0 \times 10^{4} \text{ s}$$

La lampe a donc une autonomie de l'ordre de 3 h.

La valeur obtenue semble réaliste, elle est sans doute surestimée du fait de la conversion électron/photon dont on a considéré le rendement égal à l'unité.

RP03. Saut à l'élastique



Démarche :

→ Il s'agit bien évidemment de vérifier que la personne ne risque pas de toucher le sol !

→ Dans une première étape, la personne saute dans le vide et la corde n'est pas tendue, il s'agit d'une chute libre qui se poursuit sur une distance égale à la longueur de la corde $L = 40$ m.

→ Dans un second temps, la corde va être assimilée à un ressort de raideur k, les forces étant conservatives, on appliquera une conservation de l'énergie mécanique pour déterminer l'allongement maximal égal à L_1. Tout le long du mouvement, on néglige les frottements.

Calculs :

→ On commence par déterminer la constante de raideur de la corde compte tenu de l'indication de l'énoncé :

$$T = k\Delta x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2,0 \times 10^3}{40} = 50 \text{ N.kg}^{-1}$$

→ Dans la première étape, l'énergie potentielle est transformée en énergie cinétique, on appelle m la masse de la personne :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL$$

→ Dans la seconde étape, on utilise la conservation de l'énergie mécanique en tenant compte de l'énergie potentielle du ressort et de l'énergie potentielle de pesanteur.

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_{cf} + E_{pf}^{p} + E_{pf}^{el} = 0 - mgL_1 + \frac{1}{2}kL_1^2$$

Pour l'allongement maximal, la vitesse s'annule, le calcul de l'énergie potentielle de pesanteur a été effectué en considérant une origine des altitudes à la fin de la première phase.

→ En combinant les deux équations, on en déduit :

$$mgL + mgL_1 = \frac{1}{2}kL_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad L_1^2 - \frac{2mg}{k}L_1 - \frac{2mg}{k}L = 0$$

En posant $L_0 = 2mg/k$, on en déduit :

$$L_1 = \frac{L_0}{2}\left[1 + \sqrt{1 + 4L/L_0}\right]$$

Application numérique :

En considérant une masse $m = 80$ kg, on obtient $L_0 = 32$ m et $L_1 = 55$ m et une distance totale parcourue lors du saut : $\boxed{L_{tot} = 95 \text{ m}}$.

Cette longueur est inférieure à la hauteur du pont, la corde semble bien adaptée. Du fait des frottements et des dissipations au sein de la corde, la distance parcourue devrait même être un peu plus faible.
Bien évidemment pour une personne plus lourde la corde pourrait se révéler inadaptée.

RP04. Rayon de Schwarzschild

Démarche :

→ Pour un astre de masse M_s et de rayon R_s, la vitesse de libération est donnée par :

$$v^2 = \frac{2GM_s}{R_s}$$

→ La vitesse de libération est la vitesse qu'il faut communiquer à un mobile pour qu'il puisse s'échapper à l'infini. Dans ce modèle classique, considérer que même la lumière ne peut s'échapper, revient à prendre une vitesse de libération égale, à la limite, à la célérité c.

$$c^2 = \frac{2GM_s}{R}$$

→ Le produit GM_s n'étant pas fourni, on peut l'obtenir en utilisant la troisième de Kepler pour la Terre qui effectue un tour de rayon a_0 en une année de durée T :

$$\frac{a_0^3}{T^2} = \frac{GM_s}{4\pi^2}$$

→ En combinant les deux expressions, on en déduit :

$$c^2 = \frac{2}{R_s} \times \frac{4\pi^2 a_0^3}{T^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{8\pi^2 a_0^3}{c^2 T^2}$$

Application numérique :

$$R_s = \frac{8\pi^2 \times (1,5 \times 10^{11})^3}{(3 \times 10^8)^2 \times (24 \times 365 \times 3600)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_s = 3 \text{ km}}$$

On retrouve là la caractéristique d'un trou noir qui en fait un objet extrêmement dense, la masse du Soleil se trouve concentrée dans un volume incroyablement petit.

RP05. Champ de pesanteur terrestre

Démarche :

→ Un pendule simple, de longueur L, placé dans un champ pesanteur g, oscille avec une période (cas des petites oscillations) :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

→ Le champ de pesanteur décroît avec la distance r au centre de la Terre selon :

$$g(r) = \frac{GM_T}{r^2}$$

→ Le champ de pesanteur décroît avec l'altitude, ce qui influe sur la période du pendule. Si l'effet est faible à l'échelle d'une oscillation, l'effet cumulatif à l'échelle d'une journée va désynchroniser les deux pendules.
Le plus simple est alors d'effectuer une différentielle logarithmique pour quantifier l'influence de l'altitude :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} = -\frac{1}{2}\frac{dg}{g}$$

$$g = \frac{GM_T}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dg}{g} = -\frac{2dr}{r}$$

On en déduit : $\dfrac{dT}{T} = \dfrac{dr}{r}$.

Calculs :

Pour un rayon $r = R_T = 6400$ km, une différence d'altitude $h = 381$ m, et une durée T_0 d'une journée, on observe un écart temporel ΔT entre les deux pendules :

$$\Delta T = T_0 \times \frac{h}{R_T} = 86400 \times \frac{381}{6,4 \times 10^6} \quad \boxed{\Delta T = 5 \text{ s}}$$

Cet écart temporel de quelques secondes semble observable, il pourrait cependant être masqué par des incertitudes du même ordre dues à l'imprécision des horloges mécaniques.

RP06. Émission de CO_2

Démarche :

→ L'octane est un hydrocarbure de formule C_8H_{18} qui réagit avec le dioxygène de l'air selon la réaction :

$$\mathrm{C_8H_{18}} + \frac{25}{2}\mathrm{O_2} \;=\; 8\mathrm{CO_2} \;+\; 9\mathrm{H_2O}$$

→ Pour un trajet autoroutier et un voiture citadine, on peut partir sur une consommation de l'ordre de 6 L/100 km soit un volume d'essence $V = 6,0$ L.

→ Connaissant la masse volume ρ de l'octane, on détermine le nombre de moles d'octane consommé :

$$n_{oct.} = \frac{\rho \times V}{M_{oct.}}$$

→ Compte tenu de l'équation de réaction, on en déduit le nombre de mole de dioxyde de carbone et finalement la masse de dioxyde de carbone libérée :

$$m_{CO_2} = \frac{8 \times \rho \times V}{M_{oct.}} \times M_{CO_2}$$

Application numérique :

$$m_{CO_2} = \frac{8 \times 0,75 \times 6}{(8 \times 12 + 18)} \times (12 + 2 \times 16) \quad \Rightarrow m_{CO_2} = 14 \text{ kg/100 km}$$

Et finalement pour les émissions de CO_2 : 140 g/km.