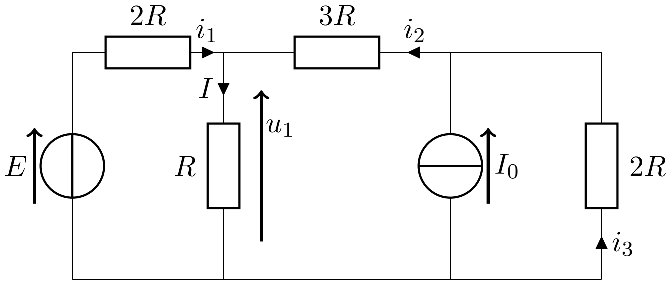
Lycée Naval, Spé 2.

2. Électricité

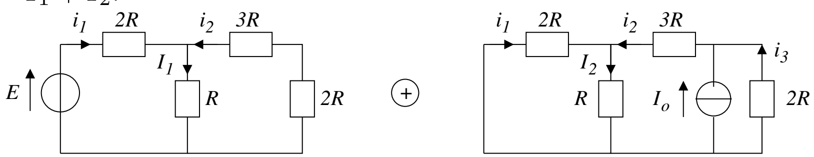
Elec01. Régime permanent

1. Utilisation des lois de Kirchhoff :
On commence par ajouter sur le schéma les grandeurs électriques nécessaires à la résolution :



En partant de la loi des nœuds et en appliquant la loi d'Ohm pour les différentes résistances, on obtient successivement :
$$I = i_1 + i_2 = \frac{E - u_1}{2R} + I_0 + i_3 = \frac{E - RI}{2R} + I_0 + i_3$$
La loi des mailles appliquée à la partie droite du circuit conduit à :
$$u_1 = RI = -3Ri_2 - 2Ri_3 = -3R \times (I_0 + i_3) - 2Ri_3 \quad \text{donc} \quad i_3 = -\frac{I + 3I_0}{5}$$
On reporte alors l'expression de i_3 dans la première relation pour en déduire :
$$I = \frac{E - RI}{2R} + I_0 - \frac{I + 3I_0}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{10}{17}\left(\frac{E}{2R} + \frac{2I_0}{5}\right)}$$

2. On éteint le générateur de courant en le remplaçant par un circuit ouvert, on éteint le générateur de tension en le remplaçant pas un fil ; on obtient alors les deux sous +circuits suivants avec les intensités I_1 et I_2 telles que $I = I_1 + I_2$.



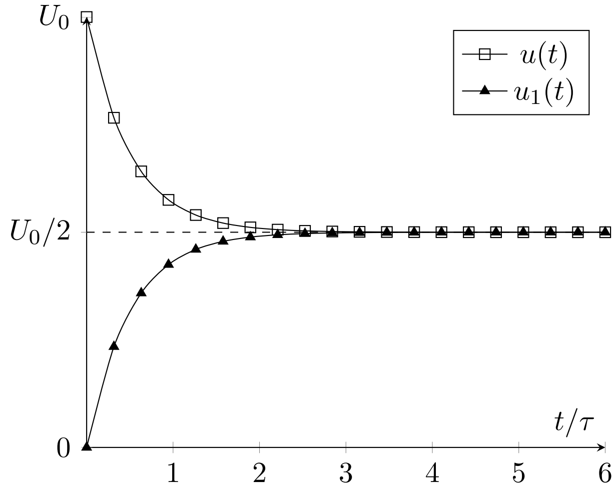
On commence par déterminer I_1 pour le circuit de gauche :
→ loi des nœuds : $I_1 = i_1 + i_2$
→ loi des mailles : $E = 2Ri_1 + RI_1$ et $RI_1 = -5Ri_2$
Grâce aux lois des mailles, on élimine i_1 et i_2 pour en déduire :
$$I_1 = \frac{E - RI_1}{2R} + \frac{-I_1}{5} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{5E}{17R}$$

On fait de même pour l'intensité I_2 dans le circuit de droite :
→ loi des nœuds : $I_2 = i_1 + i_2$ et $i_2 = i_3 + I_0$
→ loi des mailles : $2Ri_1 = -RI_2$ et $RI_2 = -3Ri_2 - 2Ri_3$
Grâce aux lois des mailles, on élimine i_1, i_2 et i_3 pour en déduire :
$$I_2 = \frac{20I_0}{5 \times 17}$$

En sommant les intensités obtenues, on retrouve le résultat de la première méthode.—

Elec02. Transfert de charge entre deux condensateurs

1. Condensateur du bas : $i = -C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ (convention générateur), condensateur du haut $i = C\mathrm{d}u_1/\mathrm{d}t$ (convention récepteur), on en déduit :
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}(u + u_1)}{\mathrm{d}t} = 0}$$
Finalement $u + u_1 = \mathit{constante} = u(0) + u_1(0) = U_0 + 0 = U_0$
2. Établissons l'équation différentielle vérifiée par u :
loi des mailles : $u = u_1 + Ri = u_1 - RC\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$
$u = U_0 - u - RC\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ car $(u_1 = U_0 - u)$.
Finalement : $\boxed{2u + \tau \mathrm{d}u/\mathrm{d}t = U_0}$.
3. Pour la solution particulière, on peut retenir une constante $u^{(P)}(t) = U_0/2$.
La solution générale sans second membre : $u^{(G)} = A\exp(-2t/\tau)$.
Le condensateur est initialement chargé sous la tension U_0 ce qui impose $u(0^+) = u(0^-) = U_0$, soit :
$$u(0) = \frac{U_0}{2} + A\exp 0 = \frac{U_0}{2} + A = U_0 \Leftrightarrow A = \frac{U_0}{2}$$
La solution est donc : $\boxed{u(t) = (U_0/2) \times (1 + \exp(-2t/\tau))}$.
L'expression de $u_1(t)$ se déduit de la question (1) :
$u_1(t) = U_0 - u(t) = \boxed{(U_0/2) \times (1 - \exp(-2t/\tau))}$
Le condensateur du bas se décharge partiellement dans le condensateur du haut jusqu'à l'égalité des deux tensions.



4. Bilan énergétique :
   Énergie initiale : $\boxed{\mathcal{E}_0 = C{U_0}^2/2}$ (un seul condensateur chargé)
   Énergie finale : (deux condensateurs chargés sous $U_0/2$).

$$\boxed{\mathcal{E}_f = 2 \times \frac{1}{2} C (\frac{U_0}{2})^2 = C\frac{{U_0}^2}{4}}$$

Expression de l'intensité :

$$i = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{R}\exp\left(-2t/\tau\right)$$

On peut alors calculer $\mathcal{E}_J$ l'énergie dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{E}_J = \int_0^\infty Ri^2 \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{{U_0}^2}{R}\exp\left(-4t/\tau\right)\mathrm{d}t = \frac{{U_0}^2}{R}[-\frac{\tau}{4}\exp\left(-4t/\tau\right)]_0^\infty$$

$$\boxed{\mathcal{E}_J = \frac{\tau {U_0}^2}{4R} = \frac{1}{4}C{U_0}^2}$$

En comparant les différents résultats on en déduit :
$$\boxed{\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_f + \mathcal{E}_J}$$
La moitié de l'énergie initiale se partage entre les deux condensateurs, l'autre moitié est dissipée par effet Joule.

Elec03. Décharge d'un condensateur dans une bobine

1. Établissons l'équation différentielle portant sur u :
   Loi d'additivité des tensions : $u = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t + ri$, avec $i = -C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ (convention générateur), soit finalement :

$$u = -LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - rC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{r}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{LC} = 0$$

   Avec les notations du texte :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = 0}$$

2. Facteur de qualité :

$$\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{10\times 10^{-3}}{10\times 10^{-6}}} \simeq 3,2}$$

   $Q > 1/2$, donc régime pseudo-périodique. Pour cette équation différentielle sans second membre, la solution est de la forme :

$$u(t) = e^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}}\left(A\cos\left(\omega t\right) + B\sin\left(\omega t\right)\right)$$

   avec $\omega = (\omega_0/2Q)\sqrt{(4Q^2-1)}$.
   Pour déterminer les constantes, il faut disposer de l'expression de $i = -C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$:

$$i = -C\left(\frac{-\omega_0}{2Q}e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\cos\left(\omega t\right) + B\sin\left(\omega t\right)\right) + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(-A\omega\sin\left(\omega t\right) + B\omega\cos\left(\omega t\right)\right)\right)$$

   Il faut alors tenir compte des conditions initiales :
   -condensateur chargé : $u(0) = E = A$
   -présence d'une bobine : $i(0^+) = i(0^-) = 0 = (-\omega_0/2Q)A + B\omega$, et donc $B = (\omega_0/2Q\omega)E$; soit finalement :

$$\boxed{u(t) = Ee^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}}\left(\cos\left(\omega t\right) + \frac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\left(\omega t\right)\right)}$$

3. Pseudo-période :

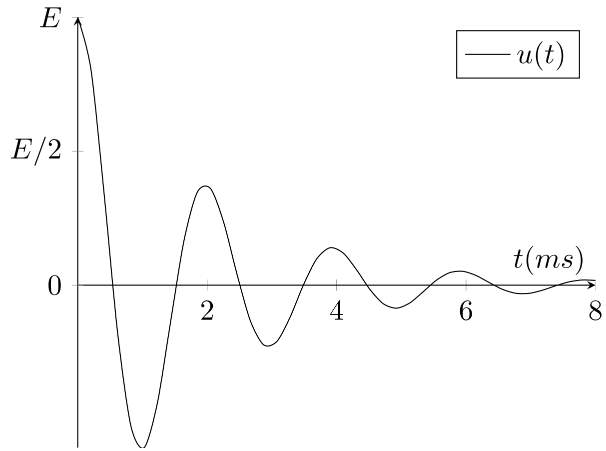
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}} \simeq 2,0 \times 10^{-3}\ \text{s}}$$

Avec deux chiffres significatifs, la valeur de T ne diffère pas de la valeur de la période propre $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

4. Pour tracer la courbe, on commence par déterminer les valeurs numériques des coefficients, sachant que $\omega \simeq \omega_0 = 3,2 \times 10^3$ rad/s, $Q \simeq 3,2$:

$$\boxed{u(t) = Ee^{-5\times10^2 t}(\cos(3,2\times10^3 t) + 0,16\sin(3,2\times10^3 t))}$$

On observe une décharge oscillante, l'énergie oscille entre le condensateur et la bobine et se dissipe progressivement dans la résistance.
Le facteur de qualité étant de l'ordre de 3, le temps d'amortissement est grossièrement trois fois plus long que le temps d'oscillation, on observe donc trois oscillations bien visibles.



Elec04. Réalisation d'un filtre moyenneur

1. Il s'agit d'un **filtre passe-bas du premier ordre**.
2. Par définition, $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$, une atténuation de 40 dB correspond donc à un gain réel égal à 10^{-2} (le gain maximal étant égal à 1 en basse fréquence).
On cherche la résistance R vérifiant :
$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} = \frac{1}{100}$$
Ce qui revient à résoudre : $RC\omega \simeq 100$ pour une fréquence de 1 kHz :
$$R = \frac{100}{2\pi fC} = \frac{100}{2\pi\times10^3\times10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 1,6\times10^4\ \Omega}$$
3. Les hautes fréquences sont quasiment éliminées et le signal en sortie est la valeur moyenne du signal (gain unité à basse fréquence) : $\underline{u_s(t) = 2\text{ V}}$.
Les hautes fréquences sont très atténuées par rapport à la valeur moyenne.
4. Le filtre se comporte comme un intégrateur pour les pulsations telles que $RC\omega \gg 1$; en effet dans ce cas de figure :
$$\underline{H} \simeq \frac{1}{jRC\omega}$$
5. Le signal étant de moyenne nulle, on peut espérer observer les hautes fréquences à l'aide d'un calibre adapté :
$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{jRC\omega} \quad \Rightarrow \quad j\omega\underline{u}_s = \frac{\underline{u}_e}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{du_s}{dt} = \frac{u_e}{RC}$$
Sur chaque portion, le signal d'entrée est une constante de valeur $+E$ ou $-E$; on a donc en sortie un **signal triangulaire** de même fréquence que le signal d'entrée et d'amplitude $\dfrac{T}{2RC}E$.

Elec05 - Caractéristiques d'un dipôle (École navale 2015, oral, sujet 0)

1. On appelle $\underline{u}_B$ la tension aux bornes de la résistance R et mesurée sur la voie Y_B et $\underline{u}_A$ la tension aux bornes du GBF.
$\rightarrow \underline{u}_B = R\underline{i}$ et $\underline{u}_A = [(R+r)+jL\omega]\,\underline{i}$

On en déduit : $\underline{u}_A = \dfrac{(R+r)+jL\omega}{R}\underline{u}_B = \dfrac{U_B}{R}\sqrt{(R+r)^2+(L\omega)^2}e^{j\varphi}$

avec $\tan\varphi = \dfrac{L\omega}{R+r}$ et une référence de phase nulle pour la tension $\underline{u}_B$.

On en déduit que $\varphi > 0$ et que la tension u_A est en avance de phase sur $\underline{u}_B$.
C'est donc l'oscillogramme de droite qui convient.

Cette question peut être résolue sans calcul : Y_A représente la tension aux bornes du générateur, Y_B la tension aux bornes de la résistance et donc le courant. La bobine tend à retarder la mise en place du courant, Y_A doit donc être en avance sur Y_B.

2. Le rapport des amplitudes des tensions est donné par :
$$\frac{U_A}{U_B} = \frac{\sqrt{(R+r)^2+(L\omega)^2}}{R} = \frac{\sqrt{(R+r)^2+(R+r)^2\tan^2\varphi}}{R} = \frac{R+r}{R}\sqrt{1+\tan^2\varphi}$$

Avec $1+\tan^2\varphi = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$, donc :
$$\frac{U_A}{U_B}\cos\varphi = \frac{R+r}{R} = 1+\frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad r = R\left[\frac{U_A}{U_B}\cos\varphi - 1\right]$$

Sur le graphique : la période T (5 divisions donc 50 ms) correspond à un déphasage de 2π, le déphasage φ correspond à une durée τ (1/2 division donc 5 ms), une simple règle de trois assure que :

$$\varphi = \frac{2\pi\tau}{T}$$

En mesurant le rapport des amplitudes des tensions sur le graphique, on peut en déduire r :

$$r = 10 \times \left[\frac{6}{2,8}\cos\left(\frac{2\pi \times 5}{50}\right) - 1\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = 7,3\ \Omega}$$

En utilisant alors l'expression théorique du déphasage :

$$L = (R+r)\frac{T}{2\pi}\tan\varphi = 17,34 \times \frac{50 \times 10^{-3}}{2\pi}\tan\frac{2\pi\tau}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = 0,10\ \mathrm{H}}$$

3. Dans le cas d'une tension constante, la bobine ne joue aucun rôle et on obtient la tension aux bornes de la résistance R grâce à la formule du pont diviseur de tension :

$$U_R = \left(\frac{R}{R+r}\right)E = \frac{10}{17,3} \times 10 \quad \boxed{U_R = 5,8\ \mathrm{V}}$$