

**4 - Thermodynamique****Th01. Pompe isotherme**

1. Au début de la  $n^e$  phase d'aspiration, le corps de pompe a un volume  $v_1$  et le gaz est à la pression  $P_0$  (le corps de pompe vient de se vider dans l'atmosphère à la pression  $P_0$ ), le corps de pompe contient donc  $P_0v_1/(RT_0)$  moles de gaz. Au même instant il y a  $P_{n-1}V/(RT_0)$  moles dans le réservoir. À la fin de la  $n^e$  phase d'aspiration, le corps de pompe et le réservoir sont à la pression  $P_n$  pour un volume total  $v_2 + V$ . La conservation du nombre de moles impose :

$$P_{n-1}V + P_0v_1 = P_n(V + v_2) \quad (1)$$

2. En prenant la limite dans les deux membres, on en déduit :

$$P_{lim}V + P_0v_1 = P_{lim}(V + v_2) \quad (2) \quad \text{donc} \quad P_{lim} = \frac{P_0v_1}{v_2}$$

Cette limite correspond à **la pression la plus faible** qu'il est possible d'atteindre dans le réservoir ; le volume résiduel  $v_1$  ne permet pas d'atteindre une pression nulle dans le réservoir.

3. On soustrait membre à membre les équations (1) et (2) pour en déduire :

$$u_n = P_n - P_{lim} = (P_{n-1} - P_{lim}) \left( \frac{V}{V + v_2} \right)$$

$$P_n - P_{lim} = (P_0 - P_{lim}) \left( \frac{V}{V + v_2} \right)^n$$

On aboutit donc à la relation proposée :

$$P_n = P_{lim} + (P_0 - P_{lim}) \left( \frac{V}{V + v_2} \right)^n$$

4. Posons  $r = (P_n - P_{lim})/P_{lim}$  ce qui donne :

$$r = \frac{P_0 - P_{lim}}{P_{lim}} \left( \frac{V}{V + v_2} \right)^n \quad \text{soit} \quad r \frac{P_{lim}}{P_0 - P_{lim}} = \frac{rv_1}{v_2 - v_1} = \left( \frac{V}{V + v_2} \right)^n$$

Ce qui donne pour la valeur limite :

$$n_l = E \left( \frac{\ln \left( \frac{rv_1}{v_2 - v_1} \right)}{\ln \left( \frac{V}{V + v_2} \right)} \right) + 1 = 377$$

5. Connaissant le nombre d'aller-retours par minute, on en déduit par une simple proportion que 377 aller-retours correspondent à une durée  $\Delta t$  :

$$\Delta t = \frac{377 \times 60}{1500} \simeq 15 \text{ s}$$

**Th02. Fuite dans une enceinte**

On va considérer un modèle simplifié dans lequel les molécules ne peuvent se déplacer que selon :  $\pm \vec{u}_x$ ,  $\pm \vec{u}_y$ ,  $\pm \vec{u}_z$  et qu'elles possèdent toute la même vitesse  $v^*$  assimilée à la vitesse quadratique. Ce modèle simplifié préserve l'isotropie.

On suppose de plus que l'ouverture est de taille suffisamment faible pour que le système soit à tout instant dans un quasi-état d'équilibre, la densité restant uniforme et la température fixée à  $T_0$ .

On appelle  $n^* = N/V$  la densité particulière, rapport du nombre de particules par le volume.

On s'intéresse au nombre  $\delta N$  de particules qui quittent l'enceinte pendant  $dt$ . Ces particules sont contenues dans le cylindre de section  $S$  et de longueur  $v^*dt$  et doivent être dirigées dans la direction de l'ouverture (facteur 1/6) :

$$\delta N = \frac{n^*}{6} v^* dt S = \frac{N}{6V} v^* dt S$$

La variation du nombre de particules dans l'enceinte notée  $dN$  est égale à l'opposé du nombre de particules qui sortent pendant  $dt$  :

$$dN = -\frac{N}{6V} v^* dt S \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{N} = -\frac{dt}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{6V}{v^* S}$$

Par simple intégration, on en déduit :  $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

Application numérique :

La vitesse quadratique est donnée par  $v^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ , pour  $m$  on prend la masse d'une molécule de diazote :

$$v^* = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 300}{28 \times 1,67 \times 10^{-27}}} \simeq 5,0 \times 10^2 \text{ m/s}$$

et donc pour le temps caractéristique :  $\tau = \frac{6 \times 1}{500 \times 10^{-4}} = 120 \text{ s}$ .

**Th03. Compression d'un gaz parfait**

1. Parmi les termes proposés, on ne peut retenir que "**adiabatique**". Le système étant isolé thermiquement de l'extérieur, il n'est pas au contact de la source de chaleur, l'énergie mécanique va échauffer le système, la transformation n'est donc pas isotherme ; cette transformation violente n'est bien évidemment pas réversible.

2. L'équilibre mécanique initial assure  $p_i = p_0$  (si on néglige le poids du piston vis à vis des forces de pression). La température est fournie  $T_i = T_0$ . On en déduit le volume en appliquant la formule des gaz parfaits pour une mole :  $V_i = RT_0/p_0$ .

3. L'équilibre mécanique final assure  $p_f = 2p_0$ .

On applique alors le premier principe au gaz entre les deux états d'équilibre. Le système étant calorifugé, le transfert thermique est nul.

$$\Delta U = W + Q = W$$

L'énergie interne est une fonction d'état qui, à l'équilibre, ne dépend que de la température dans le cas d'un gaz parfait. Pour la suite, on considère un gaz diatomique :

$$\Delta U = \frac{5R}{2}(T_f - T_0)$$

Durant la transformation la pression extérieure est fixée égale à  $2p_0$  et donc pour le travail des forces de pression :

$$W = -2p_0(V_f - V_i) = -2p_0V_f + 2p_0V_i = -p_fV_f + 2p_iV_i = -RT_f + 2RT_0$$

Le travail des forces de pression a été réécrit de manière à faire apparaître l'équation des gaz parfaits à l'instant initial et à l'instant final.

Ce qui donne :  $\frac{5R}{2}(T_f - T_0) = -RT_f + 2RT_0 \Rightarrow \boxed{T_f = \frac{9T_0}{7}}$ .

Sans surprise la température finale est plus élevée que la température initiale, le système s'échauffe lors de la compression.

Connaissant la pression finale et la température, on en déduit le volume :

$$V_f = \frac{RT_f}{p_f} = \frac{R \times 9T_0/7}{2p_0} = \frac{9}{14} \frac{RT_0}{p_0} \Rightarrow \boxed{V_f = \frac{9}{14}V_0}$$

4. Le système étant isolé thermiquement de l'extérieur, l'entropie échangée est nulle et l'entropie créée s'identifie à la variation d'entropie que l'on détermine à l'aide de la formule proposée :

$$\boxed{S^e = \Delta S = \frac{5R}{2} \ln \frac{9}{7} + R \ln \frac{9}{14}}$$

#### Th04. Solides en contact (oral École navale 2014)

Bilan énergétique :

On applique le premier principe de la thermodynamique pour le système constitué des deux blocs entre l'instant initial de mise en contact et l'instant final caractérisé par une température commune :

$$\Delta U = W + Q$$

Le système global étant isolé thermiquement de l'extérieur  $Q = 0$ . Pour des systèmes solides et supposés indéformables, on peut négliger le travail des forces de pression, donc  $\Delta U = 0$

L'énergie interne est une grandeur extensive, on a donc :

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = C(T_F - T_1) + C(T_F - T_2) = 0 \Rightarrow \boxed{T_F = \frac{T_1 + T_2}{2}}$$

Bilan entropique :

Le système global étant isolé de l'extérieur :  $\Delta S = S_e + S_c = S_c$  (pas d'entropie échangée).

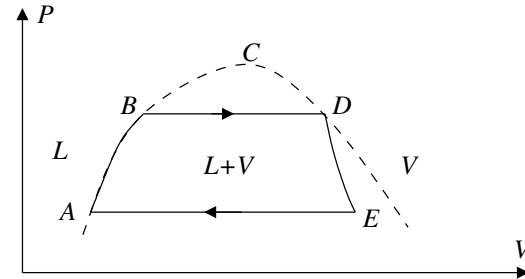
On détermine la variation d'entropie à l'aide du caractère extensif de l'entropie et de la formule pour une phase condensée :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C \ln \frac{T_f}{T_1} + C \ln \frac{T_f}{T_2} = C \ln \left( \frac{T_f^2}{T_1 T_2} \right) = C \ln \left( \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} \right)$$

$(T_1 + T_2)^2 - 4T_1 T_2 = T_1^2 + T_2^2 - 2T_1 T_2 = (T_1 - T_2)^2$ , l'argument du logarithme est supérieur à 1, on vérifie donc sans surprise :  $S_c = \Delta S > 0$  pour cette réaction irréversible.

#### Th05. Machine à vapeur (ESM Saint-Cyr)

1. Allure du cycle :



2. Pour chacune des transformations, on peut utiliser le premier principe industriel écrit pour les grandeurs massiques :

$$\Delta h = w + q$$

Avec  $w$  le travail utile massique et  $q$  le transfert thermique massique.

$$A \rightarrow B : \Delta h_{AB} = q_{AB} \text{ donc } q_{AB} = c(T_2 - T_1).$$

$$B \rightarrow D : q_{BD} = \Delta h_{BD} = \Delta_{vap} h_2 \text{ (vaporisation du liquide)}$$

$$D \rightarrow E : q_{DE} = 0 \text{ transformation adiabatique.}$$

$E \rightarrow A : q_{EA} = \Delta h_{EA} = -x_E \Delta_{vap} h_1$  (liquéfaction d'une fraction  $x_E$  de gaz).

3. Variation d'entropie sur chaque étape :

$A \rightarrow B : \Delta s_{AB} = C \ln \frac{T_2}{T_1}$  (évolution d'une phase condensée)

$B \rightarrow D : \Delta s_{BD} = \frac{\Delta_{vap} h_2}{T_2}$  (vaporisation du liquide)

$D \rightarrow E : \Delta s_{DE} = 0$  transformation adiabatique et réversible

$E \rightarrow A : \Delta s_{EA} = \frac{-x_E \Delta_{vap} h_1}{T_1}$  (liquéfaction d'une fraction  $x_E$  de gaz).

4. Sur un cycle,  $\Delta s = 0$ , c'est à dire :

$$C \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\Delta_{vap} h_2}{T_2} - \frac{x_E \Delta_{vap} h_1}{T_1} = 0$$

$$x_E = \frac{T_1}{\Delta_{vap} h_1} \left[ \frac{\Delta_{vap} h_2}{T_2} + C \ln \frac{T_2}{T_1} \right] \Rightarrow \boxed{x_E = 0,77}$$

5. Pour un moteur  $r = -\frac{w}{q_c}$ .

Le transfert thermique fourni par la source chaude sert à chauffer le fluide pour l'amener du point  $A$  au point  $D : q_c = q_{AB} + q_{BD}$ .

Sur un cycle :  $w + q_{AB} + q_{BD} + q_{EA} = 0$  sachant que le travail est associé à la détente  $DE$ .

$$r = \frac{q_{AB} + q_{BD} + q_{EA}}{q_{AB} + q_{BD}} = 1 + \frac{q_{EA}}{q_{AB} + q_{BD}} = 1 - \frac{x_E \Delta_{vap} h_1}{\Delta_{vap} h_2 + c(T_2 - T_1)} \quad \boxed{r = 0,22}$$

Dans le cas du rendement de Carnot réversible :  $r = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0,25$ , l'irréversibilité est due à l'évolution  $AB$ .

### Th06. Champ de pression, atmosphère non isotherme

1. Partant de la relation affine entre altitude et température, on détermine la constante  $a$  :

$$\boxed{a = \left( \frac{T_0 - T(z_1)}{T_0 z_1} \right) = 2,3 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}}$$

2. Les trois équations à utiliser sont :

★ l'équation d'état du gaz supposé parfait :  $p = \frac{\rho RT}{M}$

★ l'équation de la statique des fluides :  $-\rho g = \frac{dp}{dz}$

★ la loi d'évolution de la température :  $T(z) = T_0(1 - az)$

On combine ces trois relations pour obtenir une équation différentielle liant la pression à l'altitude :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz = -\frac{Mg}{RT_0} \left( \frac{1}{1 - az} \right) dz \quad \boxed{\frac{dp}{p} = -\frac{1}{H} \frac{dz}{1 - az}}$$

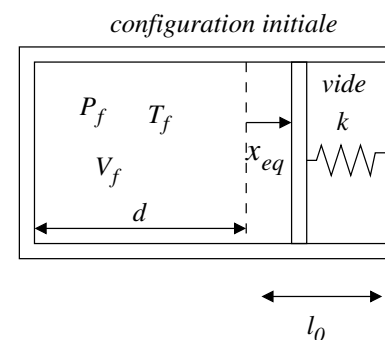
3. On intègre cette équation, l'altitude variant de 0 à  $z$  et la pression de  $p_0$  à  $p(z)$  :

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = \frac{1}{Ha} \ln(1 - az) \quad \text{soit} \quad \boxed{p(z) = p_0 e^{\left( \frac{1}{Ha} \ln(1 - az) \right)}}$$

4. Au sommet de l'Everest  $\boxed{p_1 = 0,32 \text{ atm}}$

### Th07. Équilibre d'un piston

Pour résoudre cet exercice, il faut disposer d'une équation mécanique, d'une équation thermodynamique et d'une équation d'état du fluide.



→ Équation mécanique : le piston est à l'équilibre sous l'effet de la force de pression du gaz et de la tension du ressort :

$$P_f S = k x_{eq}$$

→ Équation thermodynamique : on applique le premier principe de la thermodynamique à l'ensemble constitué du piston, du gaz et du ressort entre l'état initial et l'état d'équilibre final.

Ce système est isolé, en conséquence (attention il faut tenir compte de l'énergie potentielle du ressort) :

$$\Delta(U + E_p) = 0 \Leftrightarrow n C_{v,m} (T_f - T_0) + \frac{1}{2} k x_{eq}^2 = 0$$

On a utilisé le fait que l'énergie interne molaire d'un gaz parfait ne dépend que de la température, et en supposant un gaz diatomique :

$$\frac{5}{2} n R (T_f - T_0) + \frac{1}{2} k x_{eq}^2 = 0$$

Il reste alors à utiliser la loi des gaz parfaits et à injecter la relation liée à l'équilibre mécanique :

$$\frac{5}{2}(P_f V_f - P_0 V_0) + \frac{1}{2} k x_{eq}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \left( \frac{k x_{eq}}{S} V_f - P_0 V_0 \right) + k x_{eq}^2 = 0$$

Avec  $V_f = S(d + x_{eq})$ , on en déduit :

$$6k \times x_{eq}^2 + 5kd \times x_{eq} - 5P_0 V_0 = 0$$

En conservant la racine positive, on en déduit :

$$x_{eq} = \frac{-5kd + \sqrt{25k^2 d^2 + 120kP_0 V_0}}{6k}$$