Lycée Naval, Spé 2.

1. Mécanique

Méca01 - Ressorts couplés

La masse est soumise à quatre forces : son poids, la réaction normale du support et les forces des deux ressorts.

Première méthode : dans le référentiel galiléen du laboratoire, on applique la relation fondamentale de la dynamique à la masse, en projection selon la direction horizontale.
Quand la masse se déplace d'une longueur x selon la droite, le ressort de gauche possède un allongement x et rappelle la masse, le ressort de droite est comprimé d'une longueur x et repousse la masse vers la gauche, en conséquence :

$$m\ddot{x} = -2kx \quad \text{donc} \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{2k}{m}}$$

Seconde méthode : les seules forces qui travaillent sont les forces de tension des ressorts qui sont des forces conservatives. L'énergie mécanique du système se conserve. L'un des ressorts étant allongé de x et le second comprimé de x, on en déduit :

$$E_M = cste = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2 \times \frac{1}{2}kx^2$$

En dérivant cette relation par rapport au temps, on retrouve l'équation différentielle.

La solution est de la forme : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Avec les conditions initiales, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, on en déduit :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

Méca02 - Position d'équilibre (oral ESM Saint-Cyr 2013)

1. L'altitude de la masse étant constante, on ne s'intéresse qu'à l'énergie potentielle élastique.
$$E_p(x) = \frac{1}{2}k\left[AM^2 - l_0^2\right] + cste = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{x^2+L^2} - l_0\right]^2 + cste$$
On ajuste la constante de telle sorte à imposer une énergie potentielle nulle en $x = 0$.
$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{x^2+L^2} - l_0\right]^2 - \frac{1}{2}k\left(L - l_0\right)^2}$$
2. Les positions d'équilibre correspondent aux extrema de l'énergie potentielle :
$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2}k \times 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+L^2}}\right) \times \left(\sqrt{x^2+L^2} - l_0\right)$$
$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \times \left(\sqrt{x^2+L^2} - l_0\right) = 0$$
Les solutions possibles sont $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{l_0^2 - L^2}$.

Pour $l_0 < L$, une seule solution $x = 0$.

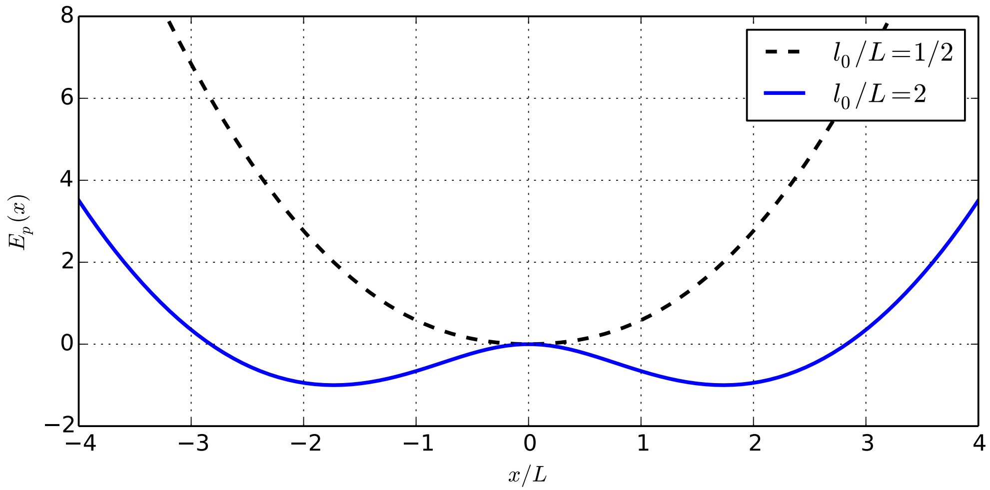
Pour $l_0 > L$, trois solutions $x = 0$, et $x = \pm\sqrt{l_0^2 - L^2}$.

La stabilité des positions d'équilibre est associée au signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle :
$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = k\left(1 - \frac{l_0 L^2}{(x^2+L^2)^{3/2}}\right)$$

$\rightarrow$ Pour $x = 0$, $E_p''(0) = k(1 - l_0/L)$, cette position est stable si $L > l_0$, instable sinon.

$\rightarrow$ Pour $x_{eq} = \pm\sqrt{l_0^2 - L^2}$, $E_p''(x_{eq}) = k\left(1 - \dfrac{L^2}{l_0^2}\right)$, si les positions d'équilibre existent ($l_0 > L$), elles sont stables.

Traçons l'énergie potentielle en fonction de x pour deux valeurs du rapport l_0/L :



Expliquons physiquement ce résultat : pour $L > l_0$, le ressort est constamment étiré, même pour $x = 0$. **La masse est ramenée vers $x = 0$ qui est**

une position d'équilibre stable.

Pour $L < l_0$, le ressort est comprimé en $x = 0$ et repousse la masse, la position $x = 0$ est instable ; **les positions d'équilibre correspondent à la position x pour laquelle la longueur du ressort est égale à la longueur à vide**.

3. Au voisinage d'une position d'équilibre stable, l'énergie potentielle peut s'écrire :

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \frac{dE_p}{dx}(x = x_{eq})\,(x - x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_{eq})\,(x - x_{eq})^2$$

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_{eq})\,(x - x_{eq})^2 = E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}K\,(x - x_{eq})^2$$

On se ramène donc au cas d'un système masse-ressort de constante de raideur K égale à la dérivée seconde de l'énergie potentielle à la position d'équilibre.

D'après le calcul de la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

Pour $L > l_0$, la position d'équilibre stable est $x = 0$, $K = k(1 - l_0/L)$, donc $\omega_0^2 = \dfrac{K}{m}$.

Pour $L < l_0$, la position d'équilibre stable est $x = \pm\sqrt{l_0^2 - L^2}$, $K' = k(1 - L^2/l_0^2)$, donc $\omega_0^2 = \dfrac{K'}{m}$.

Méca03. Rupture de contact

1. On applique la relation fondamentale de la dynamique au mobile dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le mobile étant soumis à son poids et à la réaction du support :

$$\boxed{m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}}$$

Ce qui donne après projection :

$$\boxed{ma_r = P_r + R = -mg\cos\theta + R} \quad \text{et} \quad \boxed{ma_\theta = mg\sin\theta + 0}$$

2. Sachant que $a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\rho\dot{\theta}^2$ (car ρ est constant), la première équation se réécrit :

$$\boxed{R = m(g\cos\theta - \rho\dot{\theta}^2)}$$

3. Partant de $\rho\ddot{\theta} = g\sin\theta$ on multiplie les deux membres par $\dot{\theta}$:

$$\rho\ddot{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = g\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad \text{donc} \quad \rho\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2/2}{\mathrm{d}t} = -g\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t}$$

Il faut alors intégrer l'équation précédente entre $\theta = 0$ et θ quelconque, en tenant compte que $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}_0 = 0$, pour obtenir l'équation recherchée :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\rho}(1 - \cos\theta)}.$$

4. Le mobile est soumis à deux forces, le poids force conservative et la réaction du support qui ne travaille pas (force perpendiculaire au déplacement). L'énergie mécanique du mobile se conserve.

On choisit un axe vertical orienté vers le haut et une origine en O :

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + mg\rho\cos\theta$$

Avec une vitesse quasi-nulle initialement, $E_M = mg\rho$; la conservation de l'énergie mécanique assure :

$$\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + mg\rho\cos\theta = mg\rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\rho}(1 - \cos\theta)}$$

5. On reporte alors le résultant précédent dans l'expression donnant la composante de la réaction du support :

$$R = m(g\cos\theta - \rho\dot{\theta}^2) = m(g\cos\theta - 2g(1 - \cos\theta)) = \boxed{mg(3\cos\theta - 2)}$$

6. Le mobile quitte le support quand la réaction exercée par celui-ci s'annule, soit : $\cos\theta = 2/3$, d'où $\boxed{\theta = 48,2^\circ}$

Méca04. Oscillateur et excitation sinusoïdale

1. À l'instant t la longueur du ressort est $l(t) = x(t) + l_0 - x_A(t)$, on en déduit l'allongement :

$$\boxed{\Delta l(t) = l(t) - l_0 = x(t) - x_A(t)}$$

2. Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, on applique la deuxième loi de Newton au mobile M soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction verticale du support $\vec{R}$ et à la tension du ressort :

$$m\vec{a}(M) = \vec{T} + \vec{P} + \vec{R} \quad \text{donc} \quad m\ddot{x} = -k\,(x(t) - x_A(t))$$

On en déduit :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A(t)}$$

3. On pose $\underline{x}_A(t) = X_A e^{j\omega t}$ et $\underline{x}(t) = X_m e^{(j\omega t + \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$, ce qui donne en reportant dans l'équation précédente écrite pour les représentations complexes :

$$\ddot{\underline{x}} + \omega_0^2\underline{x} = \omega_0^2\underline{x}_A(t) \quad \text{donc} \quad \left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)\underline{X}_m = \omega_0^2 X_A$$

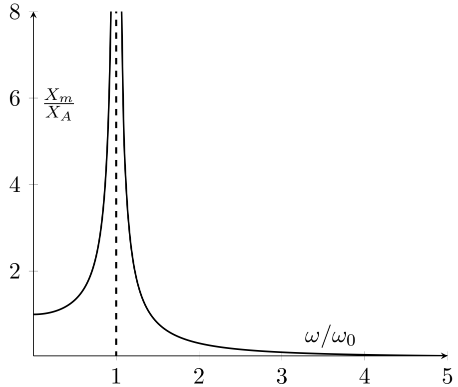
Ce qui donne pour l'amplitude complexe :

$$\boxed{\underline{X}_m = \frac{\omega_0^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}X_A}$$

4. L'amplitude X des oscillations du point M est le module de l'expression

précédente :

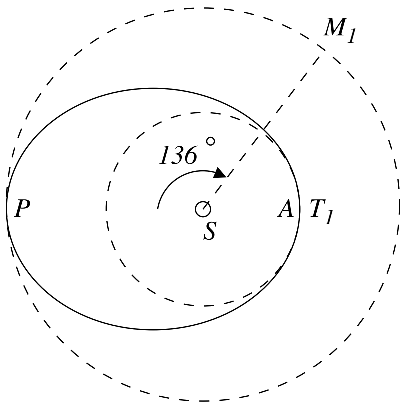
$$\boxed{X_m = |\underline{X}_m| = \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} X_A}$$



On constate que l'amplitude de l'oscillation devient infinie si le système est excité à sa pulsation propre. Cette divergente est due à l'absence de frottement. Dans la réalité, l'amplitude peut être importante mais pas infinie à la résonance, de plus le ressort finirait par rompre au-delà d'un certain allongement.

Méca05. De la Terre à Mars...

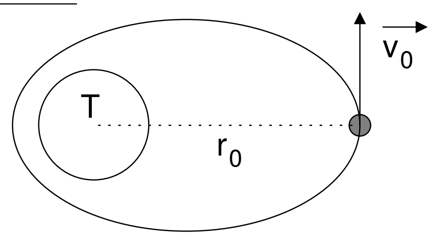
1. Représentation :



2. D'après la figure, on a : $\boxed{2a = R_0 + R_1 = (n+1)R_0}$.
3. La Terre, Mars et l'engin spatial sont soumis à l'action su Soleil, on peut appliquer pour chacun d'eux la troisième loi de Kepler. On appelle a le demi-grand axe, τ la période et on indice par T pour la Terre, M pour Mars et E pour l'engin.
$$\frac{a_M^3}{\tau_M^2} = \frac{a_T^3}{\tau_T^2} = \frac{a_E^3}{\tau_E^2} \quad \Rightarrow \quad \tau_E = \tau_T \times \left(\frac{a_E}{a_T}\right)^{3/2} = \tau_T \times \left(\frac{n+1}{2}\right)^{3/2}$$
τ_E représente la durée de parcours de l'ellipse, cependant l'engin ne parcourt que la moitié de l'ellipse, en conséquence :
$$T = \frac{\tau_T}{2} \times \left(\frac{n+1}{2}\right)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 0,71 \text{ année terrestre}}$$
4. Commençons par déterminer la période de Mars sur son orbite :
$$\tau_M = \tau_T \times \left(\frac{a_M}{a_T}\right)^{3/2} = 1,524^{3/2} \quad \Rightarrow \quad \tau_M = 1,88 \text{ année terrestre}$$
Lorsque l'engin spatial arrive au voisinage du point P, Mars doit être au rendez-vous. En τ_M, Mars fait un tour complet ; en la durée T, Mars parcourt, sur son orbite, un angle α :
$$\alpha = \frac{360 \times 0,71}{1,88} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 136°}$$
Les planètes Mars et Terre doivent être positionnées, en M_1 et T_1, comme indiqué sur le schéma lors du lancement.

Méca06. Lancement d'un satellite artificiel

1. Allure de la trajectoire :



2. Considérons le cas limite, c'est à dire la situation pour laquelle le satellite frôle la Terre au périhélie ; en appelant v_1 la vitesse au périhélie, la conservation de l'énergie mécanique permet d'affirmer :
$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM_T}{r_0} = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{GM_T}{R_T}$$
De plus la constante des aires fournit $r_0 v_0 = R_T v_1$ soit $v_1 = \frac{r_0 v_0}{R_T}$, expression que l'on reporte dans l'équation précédente pour en déduire :
$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM_T}{r_0} = \frac{r_0^2 v_0^2}{2R_T^2} - \frac{GM_T}{R_T}$$
En posant $v_0^2 = \alpha_0 \frac{GM_T}{r_0}$ pour le cas limite, on en déduit :

$$\frac{1}{2}\alpha_0\frac{GM_T}{r_0}-\frac{GM_T}{r_0}=\frac{r_0^2}{2R_T^2}\alpha_0\frac{GM_T}{r_0}-\frac{GM_T}{R_T}$$

Ce qui conduit après simplification à :

$$\boxed{\alpha>\alpha_0=\frac{2R_T}{R_T+r_0}}$$

Avec une valeur α supérieure à la valeur limite, l'énergie cinétique initiale et donc l'énergie mécanique sera plus grande donc le demi-grand axe plus grand et le périgée plus grand que R_T.

Remarque : cet exercice peut être traité plus rapidement en utilisant la formule de l'énergie mécanique en fonction du demi-grand axe : $E_M=-GM_Tm/(2a)$.

Méca08. Poulie

Première méthode : on considère le système dans sa globalité, en l'absence de dissipation, l'énergie mécanique du système se conserve.

L'énergie mécanique est constituée de trois termes : l'énergie cinétique de la poulie $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$, l'énergie cinétique de la masse M : $\frac{1}{2}M\dot{z}^2$ et l'énergie potentielle de pesanteur de la masse M : $E_p=Mgz$.

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M\dot{z}^2+Mgz=cste$$

Quand la poulie tourne de θ, la masse se déplace d'une distance $R\theta$ vers le bas, donc $z=-R\theta$ en choisissant l'origine des angles pour la position $z=0$.

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M\dot{z}^2-MgR\theta=cste$$

En dérivant cette expression par rapport au temps :

$$J\ddot{\theta}+MR^2\ddot{\theta}-MgR=0\quad\Rightarrow\quad\ddot{\theta}=\frac{MR^2}{J+MR^2}\times\frac{g}{R}$$

Avec une vitesse et une position nulles à l'instant initial :

$$\boxed{\theta(t)=\frac{MR^2}{J+MR^2}\times\frac{g}{R}\times\frac{t^2}{2}}$$

Seconde méthode :
On applique la relation fondamentale de la dynamique à la masse M en projection sur l'axe Oz :

$$M\ddot{z}=-Mg+T\quad(1)$$

On applique le théorème du moment cinétique au point O en projection sur un axe perpendiculaire au plan de la figure. La seule force qui contribue à un moment non nul est la tension du fil ; de la formule du bras de levier, on déduit :

$$J\ddot{\theta}=R\times T\quad(2)$$

Il reste enfin à utiliser $z=-R\theta$ et à combiner les équations (1) et (2) pour obtenir l'équation différentielle précédemment obtenue.

Méca09. Satellite en orbite basse (Extrait Mines PSI 2015)

1. Pour une trajectoire circulaire, l'énergie mécanique est reliée au rayon de la trajectoire par :
$$E_M=-\frac{GM_Tm_s}{2r}\quad\text{avec}\quad r=R_T+h$$
D'autre part, et de façon très générale, pour un mouvement dans un champ de gravitation, l'énergie est donnée par :
$$E_M=E_c+E_p=E_c-\frac{GM_Tm_s}{r}=-\frac{GM_Tm_s}{2r}\quad\Rightarrow\quad\boxed{E_c=\frac{GM_Tm_s}{r}=-E_M}$$
Le théorème de l'énergie mécanique appliquée au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen s'écrit :
$$\Delta E_M=W(\text{frot.})<0$$
Avec $W(\text{frot.})$ le travail des forces de frottement, travail forcément résistant car la force de frottement est en sens opposé au déplacement.

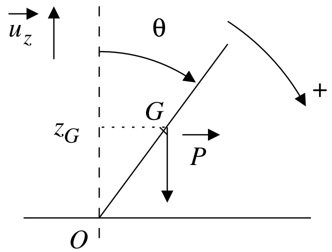
   L'énergie mécanique diminue au cours du mouvement, comme $E_c=-E_M$, **l'énergie cinétique augmente au cours du mouvement**.
2. A chaque tour, le satellite perd $\Delta h=20$ m, variation très faible vis à vis du rayon de la trajectoire de l'ordre de 7000 km. On peut donc considérer la trajectoire quasi-circulaire et appliquer la formule de l'énergie mécanique pour une trajectoire circulaire, et donc pour la variation d'énergie mécanique sur un tour :
$$\Delta E_M=\frac{-GM_Tm_s}{2(r-\Delta h)}+\frac{GM_Tm_s}{2r}=-\frac{GM_Tm_s\Delta h}{2r(r-\Delta h)}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\Delta E_M\simeq-\frac{GM_Tm_s\Delta h}{2r^2}}$$
Dans la dernière expression, on a négligé Δh vis à vis de la distance r.

   Application numérique :
$$E_M=-\frac{6,67\times10^{-11}\times5,98\times10^{24}\times250\times20}{2\times(6,7\times10^6)^2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{E_M=-22,2\times10^3\ \text{J}}$$
3. Sur un tour, il faut que l'énergie apportée par la force de poussée compense l'énergie perdue par les frottements.
La force de poussée étant dirigée dans le sens du déplacement, le travail sur un tour est égal au produit de la force par le déplacement (ici le périmètre du cercle) :
$$W_{\text{poussée}}=F\times(2\pi r)=4,26\times10^{-3}\times2\pi\times6,7\times10^6\quad\Rightarrow\quad\boxed{W_{\text{poussée}}=179\ \text{kJ}}$$

Le travail de la force de poussée sur un tour est très supérieure à l'énergie perdue par tour, il suffira de mettre en route le moteur ionique épisodiquement.

Méca10. Chute d'un arbre

1. Si on néglige les frottements, deux forces s'appliquent sur le système : le poids et la réaction du support, cette dernière s'appliquant au point O ne travaille pas.



Seul le poids travaille ; comme c'est une force conservative, l'énergie mécanique de l'arbre se conserve au cours du temps :

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgz_G = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\cos(\theta) = mg\frac{L}{2}\cos(\theta_0)$$

Compte tenu de l'expression du moment d'inertie, l'équation se simplifie :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}\left[\cos(\theta_0) - \cos(\theta)\right]}$$

2. Avec l'orientation choisie pour l'angle, θ est une fonction croissante du temps. On retient donc la racine positive de l'équation précédente et on sépare les variables :

$$\frac{d\theta}{dt} = +\sqrt{\frac{3g}{L}}\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}dt$$

On intègre alors entre l'instant initial pour lequel $\theta(0) = \theta_0$ et l'instant final $\theta(t_f) = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}\int_0^{t_f} dt$$

C'est à dire, l'intégrale étant donnée :

$$\boxed{t_f = 5,1\sqrt{\frac{L}{3g}}}$$

Avec un arbre avoisinant les 10 mètres de haut, **le temps de chute est de l'ordre de 3 secondes**.