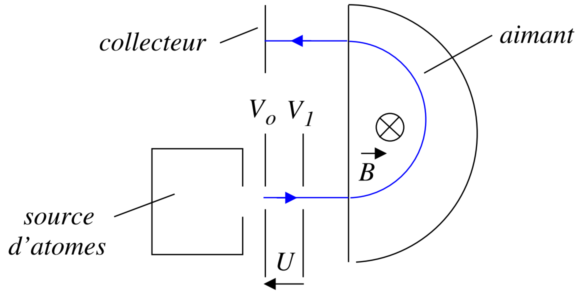
5 - Électromagnétisme

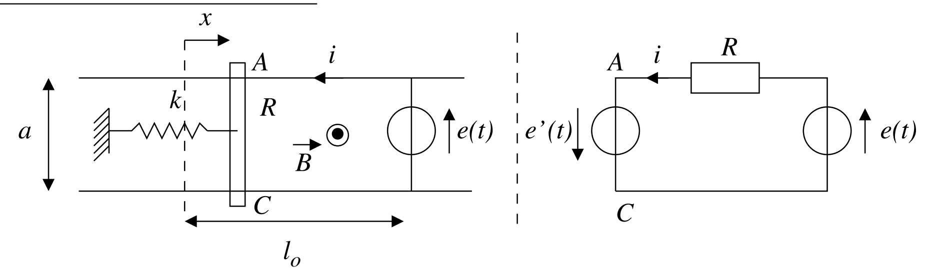
EM01. Spectromètre de masse



1. L'ion chargé $+e$ va être accéléré dans le condensateur, il va ensuite être dévié au sein de l'aimant.
   En considérant que le dispositif a une taille caractéristique de l'ordre du mètre $d = 1,0$ m, le champ magnétique doit être assez puissant pour dévier les particules jusqu'au collecteur.

   → Phase d'accélération : au sein du condensateur, l'ion est soumis à la partie électrique de la force de Lorentz. L'énergie mécanique se conserve, ce qui donne, entre l'entrée et la sortie :
   $$E_{m,e} = E_{m,s} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_e^2 + eV_0 = \frac{1}{2}mv_s^2 + eV_1$$
   En faisant l'hypothèse d'une vitesse en entrée très petite devant la vitesse en sortie du dispositif :
   $$\frac{1}{2}mv_s^2 = e(V_0 - V_1) = eU \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_s = \sqrt{\frac{2eU}{m}}}$$
   → Déviation : au sein de l'aimant, la trajectoire est circulaire caractérisée par un rayon R tel que $mv_s = eBR$, on en déduit :
   $$B = \frac{mv_s}{eR} = \frac{1}{R} \times \frac{m}{e} \times \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{1}{R}\sqrt{2Ume}$$
   L'isotope 12 du carbone est constitué de 12 nucléons qui lui confèrent l'essentiel de sa masse. En considérant un rayon $R = d/2 = 0,50$ m, on en déduit :
   $$B = \frac{1}{0,50} \times \sqrt{\frac{2 \times 10^3 \times 12 \times 1,67 \times 10^{-27}}{1,6 \times 10^{-19}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 32 \text{ mT}}$$
   Le champ magnétique nécessaire pour courber la trajectoire à l'échelle d'une table est tout à fait réalisable.
2. Avec le champ magnétique précédemment obtenu, on détermine le diamètre des trajectoires pour les deux isotopes, ce qui fournit l'écart de distance sur le détecteur :
   $$\Delta d = 2\left(R_{14} - R_{12}\right) = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2U}{e}}\left(\sqrt{m_{14}} - \sqrt{m_{12}}\right)$$
   Application numérique :
   $$\Delta d = \frac{2}{32 \times 10^{-3}} \times \sqrt{\frac{2 \times 10^3}{1,6 \times 10^{-19}}} \times \left(\sqrt{14 \times 1,67 \times 10^{-27}} - \sqrt{12 \times 1,67 \times 10^{-27}}\right)$$
   $$\boxed{\Delta d \simeq 8 \text{ cm}}$$
   La séparation des deux isotopes est donc aisée.
3. Dans l'aimant, la particule tourne sur un cercle avec une vitesse angulaire $\omega = eB/m$, la pulsation cyclotron ; c'est à dire pour la période : $T = 2\pi m/(eB)$.
   L'ion effectue un demi-tour en une durée $\tau = \dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi m}{eB} \simeq 1,2 \times 10^{-5}$ s.
   En une telle durée, une particule, sous l'effet de son poids, chute d'une hauteur :
   $$h = \frac{gt^2}{2} \simeq 5 \times 10^{-10} \text{ m}$$
   Cette hauteur est tout à fait négligeable devant les autres grandeurs du problème, on peut donc négliger l'influence de la pesanteur vis à vis de la force de Lorentz.

EM02. Tige et induction



Le générateur électrocinétique crée un courant électrique au sein du circuit électrique ; en présence du champ magnétique, il apparaît une force de Laplace sur la tige, « l'électrique agit sur le mécanique ».
La force de Laplace met la tige en mouvement ; il apparaît un flux variable du champ magnétique à travers le circuit, une force électromotrice induite apparaît

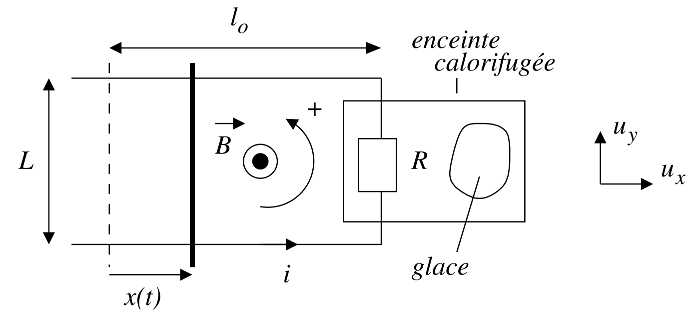
dans le circuit, « le mécanique agit sur l'électrique ».
Attention de ne pas confondre $e(t)$ la force électromotrice du générateur et $e'(t)$ la force électromotrice induite.

1. On commence par écrire une équation électrique, pour le circuit électrique équivalent (schéma de droite) :
$$e(t) + e'(t) = Ri(t)$$
Pour la force électromotrice induite :
$$e'(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B \times [l_0 - x(t)] \times a\right) \quad \Rightarrow \quad e'(t) = \dot{x}Ba$$
En conséquence : $e(t) + \dot{x}Ba = Ri$.

On applique alors le principe fondamental de la dynamique à la tige en projection sur l'axe Ox ; on note $x(t)$ l'allongement du ressort :
$$m\ddot{x} = -kx - iBa$$
On couple alors les deux équations pour en déduire :
$$m\ddot{x} = -kx - Ba \times \left(\frac{e(t) + \dot{x}Ba}{R}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{B^2a^2}{mR}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{Ba}{mR}e(t)}$$
Pour la suite, on pose : $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $\dfrac{B^2a^2}{mR} = \dfrac{\omega_0}{Q}$.

2. On s'intéresse au cas du régime forcé, on utilise la représentation complexe en notant $\underline{X}_m$ l'amplitude complexe du déplacement :
$$-\omega^2\underline{X}_m + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{X}_m + \omega_0^2\underline{X}_m = -\frac{Ba}{mR}E$$
$$\underline{X}_m = \frac{-\dfrac{BaE}{mR}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + \dfrac{j\omega\omega_0}{Q}} = \frac{-\dfrac{BaE}{mR\omega_0^2}}{(1-u^2) + \dfrac{ju}{Q}} \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$
La vitesse étant liée à la position par $v(t) = \dot{x}(t)$, la relation entre les amplitudes complexes de la position et de la vitesse est $\underline{V}_m = j\omega\underline{X}_m = j\omega_0 u\underline{X}_m$. On en déduit :
$$\boxed{\underline{V}_m = \frac{-\dfrac{BaE}{mR\omega_0} \times Q}{1 + jQ\,(u - 1/u)}}$$

EM03. Fusion de la glace par induction



1. Le mouvement de la tige entraîne une variation du flux magnétique à travers le circuit, ce qui génère une force électromotrice et un courant induit dans le circuit fermé.
Au sein de la résistance, on observe une dissipation par effet Joule qui sert à réchauffer la glace.
L'énergie est bien sûr apportée par l'opérateur qui assure le mouvement sinusoïdal de la tige.

Dans cet exercice, il n'est pas nécessaire d'écrire une équation mécanique car le mouvement de la tige est imposé, c'est une donnée.

2. Avec les conventions d'orientation du circuit :
$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B \times [l_0 - x] \times L\right) \quad \Rightarrow \quad e = B\frac{dx}{dt}L = BvL$$
Ce qui donne pour la puissance dissipée par effet Joule :
$$P_J(t) = Ri^2 = \frac{e^2}{R} = \frac{B^2L^2v^2(t)}{R}$$
Le mouvement de la barre est de la forme : $x(t) = b\cos(\omega t)$ et donc pour la vitesse $v(t) = -\omega b \sin(\omega t)$.

On peut alors déterminer la puissance moyenne sur une période :
$$\langle P_J \rangle = \frac{B^2\omega^2b^2L^2}{R}\left\langle \sin^2(\omega t) \right\rangle \quad \rightarrow \quad \langle P_J \rangle = \frac{B^2\omega^2b^2L^2}{2R}$$
L'énergie fournie est alors simplement le produit de la puissance moyenne par la durée τ.
Notons qu'en toute rigueur la puissance dépend du temps mais il paraît raisonnable de supposer que la période d'oscillation est très courte vis à vis de la durée τ de l'expérience, on peut donc se contenter de la valeur moyenne de la puissance.

L'énergie libérée sert à réchauffer la glace si on néglige les autres capacités thermiques du système calorifugé, ce qui s'écrit :

$$\frac{B^2\omega^2 b^2 L^2}{2R} \times \tau = mc\Delta\theta$$

Et donc pour la fréquence :

$$4\pi^2 f^2 = \frac{2mRc\Delta\theta}{B^2 b^2 L^2 \tau} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f = \sqrt{\frac{mRc\Delta\theta}{B^2 b^2 L^2 \tau \times 2\pi^2}}}$$

Application numérique :

$$f = \sqrt{\frac{1 \times 1 \times 2,06 \times 10^3 \times 10}{0,5^2 \times (12,5 \times 10^{-2})^2 \times 0,5^2 \times 15 \times 60 \times 2\pi^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f = 35 \text{ Hz}}$$

3. Si on dispose les systèmes en parallèle, la résistance sera soumise à la même force électromotrice, la même puissance sera dissipée par effet Joule.
   En disposant les systèmes en série, les forces électromotrices s'ajoutent, en conséquence :

$$P_{J,N} = \frac{e_N^2}{R} = \frac{N^2 e^2}{R} = N^2 \frac{e^2}{R} = N^2 P_J$$

   Il faut donc disposer les N systèmes en série.