

TD16 : propagation dispersive (correction)

Ondes087. Ligne électrique réelle. Équation des télégraphistes (**)

1. On applique la loi des mailles, les calculs étant faits à l'ordre 1 en dx :

$$u(x, t) = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} + r dx i + u(x + dx, t) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} - r i} \quad (1)$$

On applique la loi des nœuds :

$$i(x, t) = i_c + i_g + i(x + dx, t) = \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t} + g dx u(x, t) + i(x + dx, t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} - g u} \quad (2)$$

2. En dérivant la première équation par rapport à x , on peut alors éliminer i grâce à la seconde équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right) - r \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t} \left[-\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} - g u \right] - r \left[-\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} - g u \right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + [\Lambda g + \Gamma r] \frac{\partial u}{\partial t} + r g u}$$

3. On reporte dans l'équation d'onde un signal de la forme $\underline{u}(x, t) = \underline{u}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$:

$$\boxed{\underline{k}^2(\omega) = \Gamma \Lambda \omega^2 - j\omega [\Lambda g + r\Gamma] - r g}$$

\underline{k} possède une partie imaginaire non nulle liée à l'absorption (perte en ligne et résistance de fuite présentes dans le modèle). Dans le cas général, la partie réelle du nombre d'onde n'est pas proportionnelle à ω , la vitesse de phase dépend de la fréquence, le milieu est dispersif.

4. Ligne sans distorsion :

(a) Avec $\frac{\Lambda}{r} = \frac{\Gamma}{g} = \tau$, la relation de dispersion prend la forme :

$$\begin{aligned} \underline{k}^2 &= \Lambda \Gamma \omega^2 - j\omega [\Lambda g + r\Gamma] - r g \\ &= \Lambda \Gamma \omega^2 - j\omega \Lambda \Gamma \times \frac{2}{\tau} - \frac{\Lambda \Gamma}{\tau^2} \\ &= \Lambda \Gamma \left[\omega^2 - \frac{2j\omega}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} \right] = \Lambda \Gamma \left(\omega - j\frac{1}{\tau} \right)^2 \end{aligned}$$

Pour une onde se propageant dans le sens des x croissants, on retient la solution positive :

$$\boxed{\underline{k} = \sqrt{\Gamma \Lambda} \left(\omega - j \times \frac{1}{\tau} \right)}$$

(b) Vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k})} \Rightarrow \boxed{v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}}}$.

Distance caractéristique d'atténuation :

$$\delta = \frac{1}{|\text{Im}(\underline{k})|} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\tau}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}}$$

(c) On constate que **la vitesse de phase ne dépend pas de la fréquence**, le milieu n'est pas dispersif, le paquet d'onde se propage, avec atténuation, mais sans déformation.

Ondes024. Pavillon acoustique d'un soubassophone (***)

1. L'augmentation progressive de la section du pavillon permet une **meilleure adaptation** entre l'intérieur de l'instrument et l'extérieur évitant ainsi le retour de l'onde vers l'intérieur.

2. On considère une tranche fixe située entre les abscisses x et $x + dx$:

→ masse contenue à l'instant t : $\delta m(t) = \mu(x, t) S(x) dx$

→ masse contenue à l'instant $t + dt$: $\delta m(t + dt) = \mu(x, t + dt) S(x) dx$

→ masse entrant pendant dt : $\delta m_e = \mu(x, t) S(x, t) v(x, t) dt$

→ masse sortant pendant dt : $\delta m_s = \mu(x + dx, t) S(x + dx, t) v(x + dx, t) dt$

Le bilan de masse s'écrit :

$$\delta m(t + dt) - \delta m(t) = \delta m_e - \delta m_s \Rightarrow S(x) \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dt = -\frac{\partial}{\partial x} (\mu v S) dx dt$$

Dans le cadre de l'approximation acoustique, les calculs sont réalisés à l'ordre 1 en μ_1, v et P_1 ; dans le membre de droite, la présence de v permet d'assimiler μ à μ_0 :

$$S \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v S}{\partial x} = -\mu_0 \left(v \frac{dS}{dx} + S \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Pour un pavillon exponentiel, $S'(x) = S(x)/a$, en divisant l'équation précédente par $S(x)$, on en déduit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\mu_0}{a} v}$$

3. Dans le cadre de l'équation acoustique, la condition d'évolution isentropique permettent d'écrire :

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_S P_1 \Rightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \chi_S \frac{\partial P_1}{\partial t}$$

En reportant la relation liant μ_1 et P_1 dans le bilan de masse, on en déduit :

$$\chi_S \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{a}$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit : $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}$.

En dérivant par rapport au temps la relation fondamentale de la dynamique linéarisée, l'équation obtenue permet d'aboutir à l'équation recherchée :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_S}$$

4. On reporte la forme proposée pour le champ des vitesses dans l'équation de propagation :

$$-\frac{\omega^2}{c^2} = -\underline{k}^2 - \frac{i\underline{k}}{a} \Leftrightarrow \underline{k}^2 + \frac{i\underline{k}}{a} - \frac{1}{4a^2} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{c}{2a}$$

5. Les racines de l'équation de dispersion s'écrivent :

$$\underline{k} = -\frac{i}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 1}$$

Si $\omega < \omega_c$, \underline{k} est un imaginaire pur, de la forme $\underline{k} = -ik''$ (avec $k'' > 0$), ce qui donne :

$$\underline{v}(x, t) = v_0 \exp(-k''x) \exp(i\omega t)$$

Il s'agit d'une **onde évanescente qui ne se propage pas**.

6. Pour $\omega > \omega_c$, le vecteur d'onde prend la forme :

$$\underline{k} = -\frac{i}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}$$

On a conservé la solution associée à une propagation selon les x croissants.

Le champ des vitesses est alors donné par :

$$\underline{v}(x, t) = v_0 \exp\left(-\frac{x}{2a}\right) \exp(i[\omega t - k'x]) \quad \text{avec} \quad k' = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}$$

La seconde exponentielle correspond bien à une onde progressive harmonique selon les x croissants.

La première exponentielle montre une atténuation de l'amplitude de la vitesse lors de la propagation dans le pavillon. Il faut bien noter que ce terme n'est pas associé à une absorption (le fluide est supposé parfait) mais à une dilution car l'énergie acoustique se répartit sur une section qui augmente avec x .

7. Dans le cas du calcul de la moyenne du vecteur de Poynting et pour éviter de revenir aux grandeurs réelles, on peut utiliser la relation :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle P_1 v \rangle \vec{u}_x = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{P}_1 \underline{v}^*) \vec{u}_x = \frac{\mu_0 \omega v_0^2}{2} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \mathcal{R}e\left(\frac{1}{\underline{k}}\right) \vec{u}_x$$

avec :

$$\frac{1}{\underline{k}} = \frac{\underline{k}^*}{|\underline{k}|^2} = \frac{4a^2 \omega_c^2}{\omega^2} \left(\frac{i}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1} \right)$$

Et donc pour la moyenne du vecteur de Poynting :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 \omega v_0^2}{2} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \times \frac{2a \omega_c^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1} \times \vec{u}_x$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \mu_0 \omega_c v_0^2 a \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \times \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \times \vec{u}_x$$

Il reste alors à multiplier par la section $S(x) = S_0 e^{x/a}$ pour obtenir la puissance acoustique moyenne :

$$\mathcal{P} = \mu_0 \omega_c v_0^2 a S_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

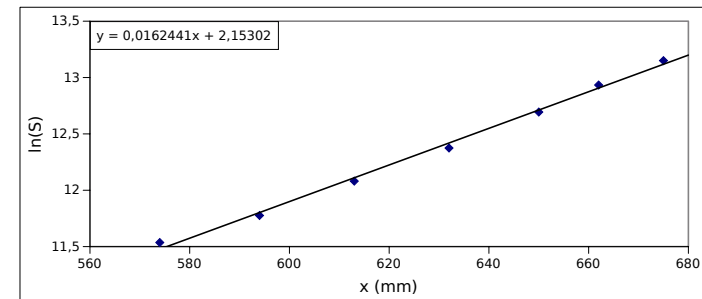
On constate que la puissance qui traverse une section du pavillon ne dépend pas de x . Ceci est logique, les phénomènes de dissipation ont été négligés, les amplitudes de v et de P_1 diminuent du fait de l'augmentation de section (dilution) mais la puissance totale transmise est conservée le long du pavillon. Le pavillon est en revanche dispersif comme le montre l'équation de propagation.

8. La section est liée au diamètre par $S = \pi d^2/4$, d'autre part, si le pavillon est bien exponentiel, la relation s'écrit :

$$S(x) = S_0 e^{x/a} \Leftrightarrow \ln(S) = \ln(S_0) + x/a$$

Il s'agit donc de tracer $\ln S$ en fonction de x .

abscisse (mm)	574	594	613	632	650	662	675
$\ln(S)$	11,5	11,8	12,1	12,37	12,69	12,9	13,2



Les points s'alignant sur une droite, l'hypothèse d'une croissance exponentielle est acceptable, le coefficient directeur est égal à $1/a$, c'est à dire :

$$a \approx 62 \text{ mm}$$

9. La fréquence de coupure vaut $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{4\pi a}$:

$$f_c = \frac{c}{4\pi a} = \frac{340}{4\pi \times 0,062} \quad \text{donc} \quad f_c \approx 4,4 \times 10^2 \text{ Hz}$$

10. On constate que les fréquences susceptibles d'être jouées sont inférieures à la fréquence de coupure et se comportent comme des ondes évanescentes dans le pavillon.

En l'absence d'amortissement, elles sont essentiellement réfléchies dans le tube et un système d'ondes stationnaires s'établit dans le tube.

11. Si les ondes ne peuvent pas se propager dans le pavillon, elles ont cependant une amplitude non nulle en sortie (décroissance exponentielle), elles peuvent donc être émises.

Le pavillon se comporte comme un miroir très réfléchissant. Ce « miroir » permet aux ondes de basse fréquence de se réfléchir dans le tube et de s'y amplifier. Cependant le coefficient de réflexion n'est pas rigoureusement égal à 1, ce qui permet l'émission des ondes.

Ondes081. Correction ionosphérique pour le système G.P.S (**)

1. Le milieu étant neutre, la densité volumique de charges est nulle et les équations de Maxwell s'écrivent pour les grandeurs complexes :

$$\text{div} \vec{E} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \frac{ne^2}{im\omega} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2. En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday et en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, on en déduit :

$$\text{rot} (\text{rot} \vec{E}) = \text{grad} (\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{ne^2}{im\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Pour l'OPPH proposée, on en déduit : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, avec $\omega_p = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$.

Pour une fréquence inférieure à la fréquence de coupure, $k^2 < 0$, le vecteur d'onde est un imaginaire pur, on est en présence d'une onde évanescente qui ne peut se propager au sein du plasma. **Le plasma se comporte comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure f_c .**

3. On considère la différentielle de la relation de dispersion :

$$k dk = \frac{\omega d\omega}{c^2} \Leftrightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{\omega} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

$$C'est \text{ \AA } \text{ dire pour la vitesse de groupe : } v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}$$

4. L'onde parcourt la distance $D - H$ à la célérité c et H à la célérité v_g pour une date de réception, avec $f_p \gg f$:

$$t = \frac{D - H}{c} + \frac{H}{v_g} \approx \frac{D - H}{c} + \frac{H}{c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{f_p}{f}\right)^2\right]} \approx \frac{D - H}{c} + \frac{H}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{f_p}{f}\right)^2\right]$$

$$\text{On en déduit : } t = \frac{D}{c} + \frac{H}{2c} \left(\frac{f_p}{f}\right)^2$$

5. On applique la relation précédente pour chacun des paquets de fréquence f_1 ou f_2 :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{H}{2c} \left(\frac{f_p}{f_2}\right)^2 - \frac{H}{2c} \left(\frac{f_p}{f_1}\right)^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{H f_p^2}{2c} \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}\right)$$

6. La formule donnant l'instant de réception peut se réécrire :

$$D = ct_1 - \frac{H}{2} \left(\frac{f_p}{f_1}\right)^2 \Rightarrow D = ct_1 - \frac{c \Delta t}{f_1^2 (1/f_2^2 - 1/f_1^2)}$$

Si l'on ne tient pas compte de l'ionosphère, la distance $D = ct_1$ est surestimée. Il est nécessaire d'apporter une correction pour obtenir la vraie distance d'où le nom de « correction ionosphérique ».

7. Application numérique :

$$d = \frac{3,0 \times 10^8 \times 1,58 \times 10^{-8}}{(1,575/1,228)^2 - 1} \Rightarrow d = 7,3 \text{ m}$$

La résolution du GPS est de l'ordre du mètre, celle du système Galiléo sera encore meilleure. En ne tenant pas compte de la correction ionosphérique, la résolution du GPS serait moins bonne. Il faut donc en tenir compte.

Ondes027. Chaîne limitée d'atomes (**)

1. On applique la relation fondamentale de la dynamique pour l'atome situé en « na » au repos ($n < 0$), il est soumis aux forces de tension des deux ressorts voisins. Le repos correspondant à la position d'équilibre, la différence des déplacements s'identifie à l'allongement des ressorts, en conséquence :

$$m \frac{\partial^2 \underline{U}_{i,n}}{\partial t^2} = -k [\underline{U}_{i,n} - \underline{U}_{i,n-1}] + k [\underline{U}_{i,n+1} - \underline{U}_{i,n}] = k [\underline{U}_{i,n+1} + \underline{U}_{i,n-1} - 2\underline{U}_{i,n}]$$

En injectant l'expression de l'onde progressive harmonique :

$$-m\omega^2 \underline{U}_{i,n} = k \underline{U}_{i,n} [e^{-iqa} + e^{iqa} - 2]$$

Ce qui donne pour la relation de dispersion :

$$\boxed{m\omega^2 = k [2 - e^{-iqa} - e^{iqa}]}$$

2. L'arrêt de la chaîne en $x = 0$ constitue un obstacle qui génère une onde réfléchie. Dit autrement l'onde incidente ne peut être, à elle seule, solution du problème, une onde réfléchie est nécessaire pour vérifier les conditions aux limites.

Le milieu s'arrêtant en $x = 0$, il n'y a pas à considérer d'onde transmise.

Le milieu étant linéaire, on cherche l'onde réfléchie sous la forme d'une onde de même pulsation se propageant dans le sens des x décroissants, ce qui donne pour l'onde résultante :

$$\underline{U}_n = \underline{U}_{i,n} + \underline{U}_{r,n} = \underline{u}_i e^{i(\omega t - qna)} + \underline{u}_r e^{i(\omega t + qna)} \quad \text{avec } n \text{ entier négatif}$$

La particule étant fixe en $x = 0$, ceci impose :

$$\underline{U}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\underline{u}_r = -\underline{u}_i}$$

Il existe donc un déphasage de π entre l'onde incidente et l'onde réfléchie.

3. On applique la relation fondamentale de la dynamique à la particule située au repos en $x = 0$, dont le déplacement est donné par \underline{U}_0 :

$$m \frac{\partial^2 \underline{U}_0}{\partial t^2} = -k [\underline{U}_0 - \underline{U}_{-1}]$$

L'amplitude du déplacement est la superposition des amplitudes de déplacement des ondes incidente et réfléchie :

$$m\omega^2 [\underline{u}_i + \underline{u}_r] = k [\underline{u}_i + \underline{u}_r - \underline{u}_i e^{iqa} - \underline{u}_r e^{-iqa}]$$

En utilisant la relation de dispersion, l'égalité précédente prend la forme :

$$\begin{aligned} [2 - e^{-iqa} - e^{iqa}] (\underline{u}_i + \underline{u}_r) &= [\underline{u}_i + \underline{u}_r - \underline{u}_i e^{iqa} - \underline{u}_r e^{-iqa}] \\ \underline{u}_i [1 - e^{-iqa}] &= \underline{u}_r [e^{iqa} - 1] \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit : } \frac{\underline{u}_r}{\underline{u}_i} = \frac{1 - e^{-iqa}}{e^{iqa} - 1} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\underline{u}_r}{\underline{u}_i} = e^{-iqa}}$$

Ondes026. Réflexion sur un conducteur de conductivité finie (***)

1. L'onde réfléchie se propage dans le vide dans le sens des $z < 0$, on en déduit :

$$\boxed{k_r = -k}$$

2. On considère l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'ARQS :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-\Delta \vec{B} = -\mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{donc} \quad k_t^2 = -\mu_0 \gamma_0 i \omega = \mu_0 \gamma_0 \omega e^{-i\pi/2}$$

C'est à dire : $k_t = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} e^{-i\pi/4}$ donc $k_t = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$, on retient la solution positive qui correspond à un champ électromagnétique amorti au sein du métal réel :

$$\boxed{\underline{k}_t = \frac{(1-i)}{\delta}}$$

3. Pour chacune des ondes planes progressives et monochromatiques, on peut déterminer le champ magnétique à l'aide de la formule classique :

$$\star \quad \boxed{\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y}$$

$$\star \quad \boxed{\vec{B}_r = -\frac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}_t = \frac{k_t}{\omega} E_{0t} e^{i(\omega t - k_t z)} \vec{u}_y}$$

4. À l'interface entre deux milieux, les relations de passage s'écrit :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

La composante tangentielle du champ électrique est donc continue.

Le métal étant réel, le courant est présent en volume sur une épaisseur de quelques fois l'épaisseur de peau δ , il n'y a donc pas de courant surfacique (contrairement au cas limite du conducteur parfait où le courant se concentre à la surface car on néglige l'épaisseur de peau). **La composante tangentielle du champ magnétique est donc également continue à l'interface.**

5. La continuité des composantes des champs électrique et magnétique s'écrit :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad \text{et} \quad \frac{E_{0i}}{c} - \frac{E_{0r}}{c} = \frac{E_{0t}}{\omega} k_t$$

On résout ce système pour en déduire :

$$\boxed{r = \frac{E_{or}}{E_{0i}} = \frac{1 - \frac{k_t c}{\omega}}{1 + \frac{k_t c}{\omega}}} \quad \text{et} \quad \boxed{t = \frac{E_{ot}}{E_{0i}} = \frac{2}{1 + \frac{k_t c}{\omega}}} \quad \text{avec} \quad \underline{k}_t = \frac{1 - i}{\delta}$$

À la limite du conducteur parfait, $\gamma_0 \rightarrow +\infty$ et $\delta \rightarrow 0$ donc $\frac{|k_t|c}{\omega} \gg 1$, ce qui impose :

$$r_\infty \rightarrow -1 \quad \text{et} \quad t_\infty \rightarrow 0$$

On retrouve bien le **conducteur parfait** pour lequel l'onde est **totalelement réfléchie avec un déphasage π** .

6. Pression de radiation

(a) Dans le cas d'un circuit linéique, la force de Laplace s'écrit : $d\vec{f} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$ ce qui se traduit dans le cas volumique par la formule :

$$d\vec{f} = \vec{j} dv \wedge \vec{B} \quad \text{donc} \quad \vec{f}_v = \frac{d\vec{f}}{dv} = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

On prend enfin la valeur moyenne :

$$\langle \vec{f}_v \rangle = \langle \vec{j} \wedge \vec{B} \rangle = \langle \gamma_0 \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle \quad \text{donc} \quad \boxed{\langle \vec{f}_v \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\gamma_0 \vec{E} \wedge \vec{B}^*)}$$

On utilise alors l'expression du champ électromagnétique dans le métal pour simplifier cette expression :

$$\langle \vec{f}_v \rangle = \frac{\gamma_0}{2} \text{Re} \left(\vec{E}_t \wedge \left(\frac{k_t^* \vec{u}_z}{\omega} \wedge \vec{E}_t^* \right) \right) = \frac{\gamma_0}{2\omega} |\underline{E}_t|^2 \text{Re}(k_t^*) \vec{u}_z$$

$$\langle \vec{f}_v \rangle = \frac{\gamma_0}{2\omega\delta} |\underline{E}_t|^2 \vec{u}_z$$

$$\langle \vec{f}_v \rangle = \frac{\gamma_0}{2\omega\delta} |\underline{E}_{0t}|^2 e^{-2z/\delta} \vec{u}_z = \frac{\gamma_0}{2\omega\delta} |t|^2 |\underline{E}_{0i}|^2 e^{-2z/\delta} \vec{u}_z$$

L'onde incidente étant une onde plane harmonique et progressive, $\langle e_i \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} |\underline{E}_{0i}|^2$, l'expression de la force volumique peut donc s'écrire :

$$\boxed{\langle \vec{f}_v \rangle = \frac{\gamma_0}{\omega\delta\epsilon_0} |t|^2 \langle e_i \rangle e^{-2z/\delta} \vec{u}_z}$$

(b) Commençons par sommer la force volumique sur toute la profondeur du métal :

$$\int_{z=0}^{\infty} \langle \vec{f}_v \rangle dz = \frac{\gamma_0}{2\omega\epsilon_0} |t|^2 \langle e_i \rangle \vec{u}_z$$

L'expression trouvée est la force qui s'exerce sur une surface unité, c'est donc une pression :

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\gamma_0}{2\omega\epsilon_0} |t|^2 \langle e_i \rangle}$$

(c) Pour les fréquences considérées, $t \simeq \frac{2\omega}{k_t c}$, donc :

$$|t|^2 = \frac{4\omega^2}{|k_t|^2 c^2} = \frac{2\omega^2 \delta^2}{c^2} = \frac{4\omega^2}{\mu_0 \gamma_0 \omega c^2} = \frac{4\omega}{\mu_0 \gamma_0 c^2}$$

Résultat que l'on reporte dans l'expression de la pression :

$$\langle P \rangle = \frac{\gamma_0}{2\omega\epsilon_0} \frac{4\omega}{\mu_0 \gamma_0 c^2} \langle e_i \rangle \quad \text{donc} \quad \boxed{\langle P \rangle = 2 \langle e_i \rangle}$$