TD16 : propagation dispersive

Ondes087. Ligne électrique réelle. Équation des télégraphistes (**)

On reprend le modèle d'une ligne électrique à constantes réparties, en tenant compte de différentes pertes. La base est le modèle d'une ligne idéale, caractérisée par son inductance linéique Λ et sa capacité linéique Γ. On y ajoute une résistance linéique r prenant en compte la résistivité non nulle des conducteurs, ainsi qu'une résistance de fuite dans l'isolant qui sépare les deux conducteurs. On caractérise cette fuite de courant par la conductance linéique g de la ligne.

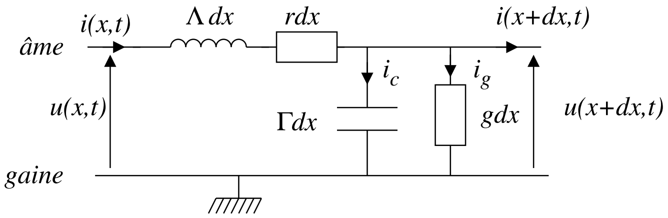


schéma électrique équivalent

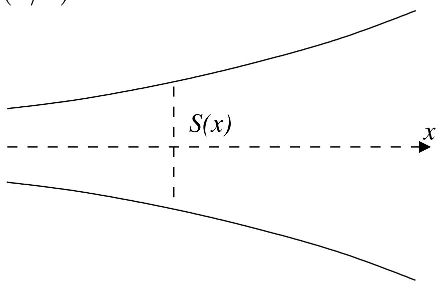
1. Écrire le système d'équations aux dérivées partielles satisfait par $u(x,t)$ et $i(x,t)$ obtenu par application de la loi des mailles et de la loi des nœuds au tronçon précédent.
2. En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la tension $u(x,t)$. Cette équation est appelée « équation des télégraphistes ».
3. Établir la relation de dispersion correspondante et préciser si la propagation se fait, dans le cas général avec ou sans atténuation et avec ou sans dispersion (on ne demande pas de calcul explicite).
4. On choisit les paramètres de la ligne tels que $\dfrac{\Lambda}{r} = \dfrac{\Gamma}{g} = \tau$.
   (a) Montrer alors que pour une propagation dans le sens des x croissants :
   $$\underline{k} = \sqrt{\Gamma\Lambda}\left(\omega - j \times \frac{1}{\tau}\right)$$
   (b) Déterminer la vitesse de phase et la distance caractéristique d'atténuation.
   (c) On parle de ligne « sans distorsion ». Justifier.

Réponses : 1 : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t} - ri$, $\dfrac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \dfrac{\partial u}{\partial t} - gu$; 2 : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma\Lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + [\Lambda g + \Gamma r]\dfrac{\partial u}{\partial t} + rgu$
3 : $\underline{k}^2(\omega) = \Gamma\Lambda\omega^2 - j\omega\,[\Lambda g + r\Gamma] - rg$; 4(b) : $v_\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$, $\delta = \dfrac{\tau}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$

Ondes024. Pavillon acoustique d'un soubassophone (***)

Le soubassophone est un instrument de musique de la famille des cuivres. Il se termine par un pavillon exponentiel.

On s'intéresse à la propagation d'une onde acoustique dans la partie terminale de l'instrument c'est à dire au sein du pavillon à symétrie de révolution, de section variable $S(x) = S_0 \exp(x/a)$.



Le fluide supposé parfait est caractérisé au repos par la pression P_0 et la masse volumique μ_0. L'action de la pesanteur sur le fluide est omise.
En présence d'une onde acoustique, la pression vaut $P(x,t) = P_0 + P_1(x,t)$, la masse volumique $\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t)$ et la vitesse $\vec{v}(x,t)$. On se place dans le cadre de l'approximation acoustique.
Le coefficient de compressibilité isentropique est noté χ_S.
On suppose le problème unidimensionnel avec un champ des vitesses, en notation

complexe, de la forme :

$$\underline{v}(x,t) = v_0 \exp\left[i\left(\omega t - \underline{k}x\right)\right]\vec{u}_x$$

1. Expliquer l'intérêt de la présence d'un pavillon pour transmettre vers l'extérieur l'énergie sonore.
2. En réalisant un bilan de masse sur une tranche fixe située entre x et $x+dx$, montrer que la vitesse et la masse volumique sont liées par la relation :
$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\mu_0}{a} v$$
3. Montrer que la vitesse vérifie l'équation d'onde :
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_S}$$
4. Montrer que la relation de dispersion s'écrit :
$$\underline{k}^2 + \frac{i\underline{k}}{a} - \frac{1}{4a^2}\frac{\omega^2}{\omega_c^2} = 0$$
avec ω_c à exprimer en fonction de c et a.
5. Montrer que le pavillon ne laisse se propager que des ondes de pulsation supérieure à ω_c.
6. Dans le cas où il y a propagation, montrer que le champ des vitesses est donné par :
$$\underline{v}(x,t) = v_0 \exp\left(-\frac{x}{2a}\right)\exp\left(i\left[\omega t - k'x\right]\right) \quad \text{avec} \quad k' = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}$$
ou tout aussi bien :
$$\underline{v}(x,t) = v_0 \exp\left(i\left[\omega t - \underline{k}x\right]\right) \quad \text{avec} \quad \underline{k} = -\frac{i}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}$$
En repartant de la relation fondamentale de la dynamique linéarisée, on montre alors que :
$$\underline{P}_1(x,t) = \frac{\mu_0 \omega v_0}{\underline{k}} \exp\left(-\frac{x}{2a}\right)\exp\left(i\left[\omega t - k'x\right]\right)$$
7. Déterminer la moyenne du vecteur de Poynting et montrer que la puissance acoustique $\mathcal{P}$ traversant une section du pavillon est indépendante de x. Commentaire. Le pavillon est-il absorbant ? dispersif ?

Une étude de la photo du soubassophone a permis d'accéder au diamètre D de la section du pavillon en fonction de l'abscisse x sur les 10 derniers centimètres avant la sortie. Les résultats sont répertoriés dans le tableau cidessous :

abscisse (mm)	574	594	613	632	650	662	675
diamètre (mm)	361	407	474	549	644	726	809

8. Peut-on considérer qu'il s'agit d'un pavillon exponentiel ?
9. Déterminer la fréquence de coupure, en Hz, du pavillon du soubassophone.
10. Sachant que la note la plus grave que l'on peut jouer avec cet instrument est un fa0#, de fréquence 46,25 Hz et la note la plus aigue est un la2, de fréquence 220 Hz, expliquer qu'un système d'ondes stationnaires peut se mettre en place dans le tube de l'instrument.
11. Justifier que ces ondes peuvent toutefois être émises au niveau du pavillon.

Réponses : 7 : $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \mu_0 \omega_c v_0^2 a \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \times \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \times \vec{u}_x$, $\mathcal{P} = \mu_0 \omega_c v_0^2 a S_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$; 8 : $a \approx 62$ mm ; 9 : $f_c \approx 4,4 \times 10^2$ Hz

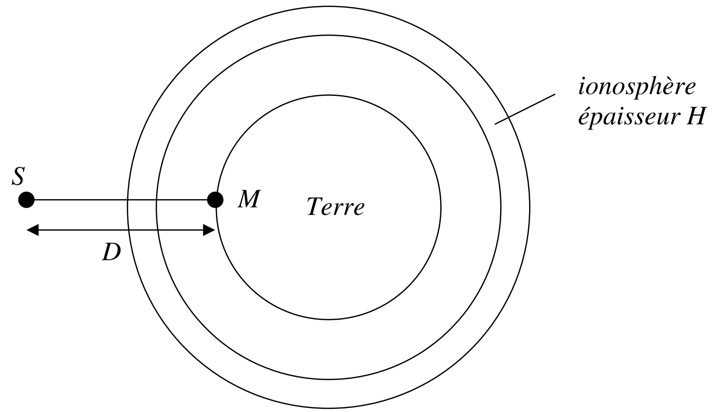
Ondes081. Correction ionosphérique pour le système G.P.S (**)

On considère une onde se propageant dans l'ionosphère, plasma dilué localement neutre contenant n électrons libres par unité de volume. La charge d'un électron est notée $-e$, sa masse m. On considère une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement se propageant dans l'ionosphère, soit, en utilisant la notation complexe : $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}}.\vec{r})}$; $\underline{\vec{B}} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}}.\vec{r})}$

Le champ électrique engendre des courants de densité volumique : $\underline{\vec{j}} = \frac{ne^2}{im\omega}\underline{\vec{E}}$.

On note c la célérité de la lumière dans le vide. On donne la formule : $\overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})\right] = \overrightarrow{\text{grad}}\left[\text{div}(\vec{E})\right] - \vec{\Delta}\vec{E}$.

1. Écrire les équations de Maxwell dans le plasma en notation complexe.
2. En déduire que la relation de dispersion dans le plasma se met sous la forme $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. Exprimer la pulsation ω_p en fonction de n, e, ε_0, et m. La fréquence $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ est appelée pulsation de coupure du plasma. Justifier son nom.
En journée, cette fréquence est de l'ordre de $1,0$ MHz.
3. On suppose $f > f_p$. Déterminer la vitesse de groupe : vitesse d'un paquet d'ondes très étroit centré sur la fréquence f. Donner cette vitesse en fonction de f et de f_p.
4. Un satellite S se trouve au dessus de l'ionosphère et communique avec un point M de la Terre. On note D la distance SM et H l'épaisseur d'ionosphère traversée.
La partie de l'atmosphère qui n'est pas l'ionosphère est assimilée au vide.



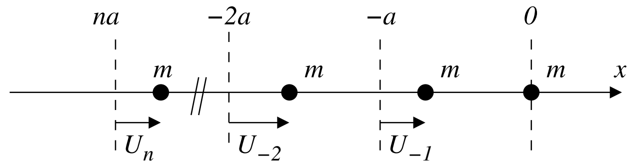
Le satellite émet à $t = 0$ un paquet d'ondes de fréquence f telle que $f \gg f_p$. Exprimer la date t de réception du signal en M en fonction de D, c, H, f_p et f.
On effectuera un développement à l'ordre le plus bas non nul en f_p/f.

5. Deux paquets d'ondes de fréquences f_1 et f_2 telles que $f_1 > f_2 \gg f_p$ sont émis simultanément en S à la date $t = 0$, ils arrivent respectivement en M aux dates t_1 et t_2. Exprimer en fonction de H, c, f_p, f_1 et f_2 le décalage temporel $\Delta t = t_2 - t_1$ entre les deux paquets d'ondes à leur arrivée en M.
6. Déduire des deux questions précédentes que la distance entre M et le satellite peut s'écrire $D = ct_1 - d$, avec $d = \dfrac{c\Delta t}{f_1^2\left(1/f_2^2 - 1/f_1^2\right)}$. Le terme d est appelé correction ionosphérique, obtenu par mesure de Δt en temps réel. Justifier son nom.
7. On donne $f_1 = 1,575$ GHz ; $f_2 = 1,228$ GHz ; $c = 3,0 \times 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}.
On mesure $\Delta t = 1,58 \times 10^{-8}$ s. Quelle erreur sur D serait commise pour un signal de fréquence f_1 si l'on n'effectuait pas la correction ionosphérique ? Commenter cette valeur.

Réponses : 2 : $\omega_p = \dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$; 3 : $v_g = c\sqrt{1-\left(\dfrac{f_p}{f}\right)^2}$; 4 : $t = \dfrac{D}{c} + \dfrac{H}{2c}\left(\dfrac{f_p}{f}\right)^2$;
5 : $\Delta t = \dfrac{Hf_p^2}{2c}\left(\dfrac{1}{f_2^2} - \dfrac{1}{f_1^2}\right)$; 7 : $d = 7,3$ m

Ondes027. Chaîne limitée d'atomes (**)

On considère une chaîne de particules identiques, de masse m, situées à l'équilibre aux points d'abscisse $X_n = na$ sur un axe (Ox). Soit U_n le déplacement de la particule n. On suppose qu'il existe entre deux particules adjacentes des forces de rappel élastique de constante de raideur k.



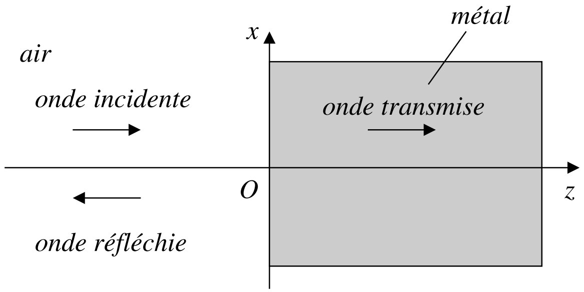
La chaîne est illimitée du côté des x négatifs et limitée en $x = 0$. La particule en $x = 0$ est fixe. On envoie une onde acoustique incidente de la gauche vers la droite qui engendre le déplacement $\underline{U}_{i,n} = \underline{u}_i \exp\left(i\left[\omega t - qna\right]\right)$ pour la n^{e} particule de la chaîne.

1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une particule quelconque, et en considérant le cas d'une onde progressive, obtenir la relation de dispersion entre q et ω :
$$m\omega^2 = k\left[2 - e^{-iqa} - e^{iqa}\right]$$
2. On suppose que la particule en $x = 0$ est fixe. Montrer que l'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie de même pulsation et de même module. Déterminer le déphasage entre l'onde incidente et l'onde réfléchie.
3. On considère maintenant que la particule en $x = 0$ est susceptible de se déplacer. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la particule placée au repos en $x = 0$, déterminer la relation entre les amplitudes des ondes incidente et réfléchie.

Réponses : 2 : $\underline{u}_r = -\underline{u}_i$, déphasage π ; 3 : $\dfrac{\underline{u}_r}{\underline{u}_i} = e^{-iqa}$

Ondes026. Réflexion sur un conducteur de conductivité finie (***)

Un milieu conducteur, de conductivité γ_0, occupe le demi-espace $z > 0$ tandis que l'air (assimilé au vide) occupe le demi-espace $z < 0$. Une onde électromagnétique de pulsation ω se propage selon (Oz). Le champ électrique de cette onde incidente s'écrit :
$$\underline{\vec{E}}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$



Cette onde incidente donne naissance au niveau de l'interface à une onde réfléchie et une onde transmise :

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{E}_{0r} e^{i(\omega t - k_r z)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}_t = \underline{E}_{0t} e^{i(\omega t - \underline{k}_t z)} \vec{u}_x$$

On se placera dans une gamme de fréquences suffisamment faibles pour pouvoir, dans le métal, négliger le courant de déplacement vis à vis du courant de charges dans l'équation de Maxwell-Ampère.

1. L'onde réfléchie se propageant dans le vide dans le sens des $z < 0$, déterminer l'expression de k_r.
2. À l'aide des équations de Maxwell, montrer que, dans le métal, $\underline{k}_t = (1-i)/\delta$ avec $\delta = \sqrt{2/(\mu_0 \gamma_0 \omega)}$.
3. Donner les expressions des champs magnétiques $\underline{\vec{B}}_i$, $\underline{\vec{B}}_r$ et $\underline{\vec{B}}_t$ associés à chacune des ondes.
4. Que peut-on dire des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique au niveau de l'interface ?
5. En déduire les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ en amplitude pour le champ électrique.
   Montrer que l'on peut, à la limite, retrouver le cas d'un conducteur parfait.
6. Pression de radiation
   (a) Justifier que, sur le milieu conducteur, s'exerce une force volumique moyenne :
   $$\left\langle \vec{f}_v \right\rangle = \frac{1}{2} Re \left(\gamma_0 \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^* \right)$$
   L'exprimer en fonction de z, δ, et de la densité moyenne d'énergie électromagnétique de l'onde incidente, notée $< e_i >$.
   (b) En déduire qu'il s'exerce sur le métal une force pressante dans la direction de l'onde incidente et définir une pression moyenne $< P >$, appelée pression de radiation.
   (c) Exprimer $< P >$ en fonction de $< e_i >$ (on considère $|\underline{k}_t| c/\omega \gg 1$).

Réponses : 1 : $k_r = -k$; 3 : $\underline{\vec{B}}_i = \dfrac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$, $\underline{\vec{B}}_r = -\dfrac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y$, $\underline{\vec{B}}_t = \dfrac{\underline{k}_t}{\omega} \underline{E}_{0t} e^{i(\omega t - \underline{k}_t z)} \vec{u}_y$; 5 : $\underline{r} = \dfrac{\underline{E}_{or}}{E_{0i}} = \dfrac{1 - \dfrac{\underline{k}_t c}{\omega}}{1 + \dfrac{\underline{k}_t c}{\omega}}$, $\underline{t} = \dfrac{\underline{E}_{ot}}{E_{0i}} = \dfrac{2}{1 + \dfrac{\underline{k}_t c}{\omega}}$ avec $\underline{k}_t = \dfrac{1-i}{\delta}$;
6(a) : $\left\langle \vec{f}_v \right\rangle = \dfrac{\gamma_0}{\omega \delta \varepsilon_0} |\underline{t}|^2 < e_i > e^{-2z/\delta} \vec{u}_z$; 6(b) : $< P >= \dfrac{\gamma_0}{2\omega\varepsilon_0} |\underline{t}|^2 < e_i >$;
6(c) : $< P >= 2 < e_i >$