TD15 : Ondes électromagnétiques dans le vide

Caractéristiques d'une onde électromagnétique

Ondes015. Onde électromagnétique plane progressive (*)

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_x\vec{u}_x + \underline{E}_y\vec{u}_y \quad \text{avec} \quad \underline{E}_x = E_0 \exp\left(i\left[\omega t - \frac{k}{3}(2x+2y+z)\right]\right) \quad \text{et} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6,0 \times 10^{-7}$ m.

1. Calculer la fréquence de l'onde. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?
2. Définir le vecteur unitaire $\vec{u}$ associé à la propagation de l'onde et établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.
3. À l'aide d'une des équations de Maxwell, exprimer $\underline{E}_y$ en fonction de $\underline{E}_x$.
4. Exprimer le champ magnétique de cette onde.
5. Montrer que la moyenne temporelle du vecteur de Poynting a pour expression :

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\vec{u}$$

Réponses : 1 : $\nu = 5,0 \times 10^{14}$ Hz ; 2 : $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}\vec{u}_x + \frac{2}{3}\vec{u}_y + \frac{1}{3}\vec{u}_z\right)$, $2x + 2y + z = cste$; 3 : $\underline{E}_y = -\underline{E}_x$; 4 : $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{E}_x}{3c}(\vec{u}_x + \vec{u}_y - 4\vec{u}_z)$

Ondes016. Onde électromagnétique progressive (**)

On donne la représentation complexe du champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide, en coordonnées cartésiennes :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\exp\left(i\left[\omega t - k_0 z\right]\right)\vec{u}_y + \underline{\alpha} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\exp\left(i\left[\omega t - k_0 z\right]\right)\vec{u}_z$$

avec $\underline{\alpha}$ complexe et k_0 réel positif.

1. Déterminer $\underline{\alpha}$ et k_0 en fonction de ω, a et c.
2. Déterminer, en notation réelle, le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde.
3. Cette onde est-elle plane ? progressive ? harmonique ? transverse électrique ? transverse magnétique ?
4. Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne dans le temps.

Réponses : 1 : $k_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$, $\underline{\alpha} = \frac{i\pi}{ak_0}$; 2 : $\vec{B} = -\frac{E_0\omega}{k_0c^2}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - k_0 z)\vec{u}_x$; 4 : $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{E_0^2\omega}{2\mu_0 k_0 c^2}\cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)\vec{u}_z$

Ondes079. Guides d'ondes coaxial (**)

On considère une onde guidée se propageant dans le vide entre deux conducteurs parfaits. Le conducteur intérieur est un cylindre à base circulaire de rayon extérieur R_1 ; le conducteur extérieur un cylindre de rayon intérieur R_2.
On donne la structure de l'onde en coordonnées cylindriques d'axe Oz confondu avec l'axe des conducteurs :

$$\underline{\vec{E}} = E_0(r)e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}} = \vec{B}_0(r)e^{i(\omega t - kz)}$$

On note $E_1 = \lim_{r \to R_1^+} E_0(r)$.

On donne en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\right)\vec{u}_z$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

1. Exprimer $E_0(r)$ et $\vec{B}_0(r)$.
2. Exprimer le vecteur de Poynting instantané et la puissance moyenne qui traverse le câble.

Réponses : 1 : $E_0(r) = \frac{R_1E_1}{r}$, $\vec{B}_0(r) = \frac{R_1E_1}{r}\frac{k}{\omega}\vec{u}_\theta$; 2 : $\vec{\Pi}(\vec{r},t) = \frac{R_1^2E_1^2}{r^2\mu_0}\frac{k}{\omega}\cos^2(\omega t - kz)\vec{u}_z$, $\mathcal{P} = \frac{\pi R_1^2E_1^2}{\mu_0}\frac{k}{\omega}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

Aspects énergétiques

Ondes077. Laser He-Ne (*)

Le laser émet dans la direction $\vec{u}_x$ une onde lumineuse monochromatique plane polarisée rectilignement dans la direction $\vec{u}_y$.
Données : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H · m^{-1}, $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J · s.

1. Donner l'expression du champ $\vec{E}$, du champ $\vec{B}$ et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.

   La longueur d'onde émise est $\lambda = 632,8$ nm. Le faisceau de lumière émise est cylindrique, de section droite $S = 0,25$ cm^2. La puissance moyenne P reçue par un capteur placé normalement au faisceau est $P = 1,0$ W .

2. Déterminer l'amplitude du champ électrique et du champ magnétique émis par le laser, ainsi que l'énergie électromagnétique volumique moyenne dans le faisceau.

3. Déterminer la densité particulaire de photons au sein du faisceau.

Réponses : 1 : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$, $\vec{B} = \dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$, $\vec{\Pi} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{u}_x$; 2 : $E_0 = 5,5$ kV $\cdot$ m^{-1}, $B_0 = 1,8 \times 10^{-5}$ T, $\langle \omega_{EM} \rangle = 1,3 \times 10^{-4}$ J $\cdot$ m^{-3} ; 3 : $n = 4,2 \times 10^{14}$ m^{-3}

Ondes018. Flux d'énergie solaire (**)

Le flux d'énergie solaire, au niveau de la Terre (en haute atmosphère), est :

$$\Phi = 2,0 \text{ cal} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \quad \text{avec} \quad 1 \text{ cal} \approx 4,2 \text{ J}$$

Données : rayon terrestre $R_T = 6400$ km, distance Terre-Soleil $a = 150 \times 10^6$ km et rayon du Soleil : $R_s = 7,0 \times 10^8$ km, constante de Planck $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s.

1. Convertir ce flux en kW $\cdot$ m^{-2}.
2. En assimilant la longueur d'onde des photons à une longueur d'onde moyenne $\lambda = 600$ nm, déterminer le nombre de photons reçu sur Terre chaque seconde.
3. Déterminer la puissance totale P émise par le Soleil.
4. En assimilant l'onde électromagnétique à une onde plane, déterminer l'amplitude du champ électrique de cette onde au niveau de la haute atmosphère.

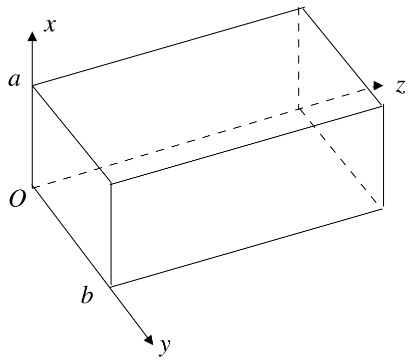
Réponses : 1 : $\Phi = 1,4$ kW $\cdot$ m^{-2} ; 2 : $N = 5,4 \times 10^{35}$ photons ; 3 : $\mathcal{P} \approx 4 \times 10^{26}$ W ; 4 : $E_0 = 1,0 \times 10^3$ V $\cdot$ m^{-1}

Pour aller plus loin

Ondes021. Onde guidée dans un conducteur creux (**)

On considère un guide creux comme indiqué sur le schéma. Ce guide est limité par les parois d'un conducteur parfait. On étudie la possibilité de propagation d'une onde transverse électrique de la forme :
$\underline{\vec{E}} = E_0(y)e^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_x$ et $\underline{\vec{B}} = (\underline{B}_{0y}(y)\vec{u}_y + \underline{B}_{0z}(y)\vec{u}_z)e^{i(\omega t - kz)}$.

On pose $k_c^2 = \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - k^2$ avec k_c un réel positif.



On rappelle que le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur parfait.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $E_0(y)$.
2. À l'aide des conditions aux limites du champ électrique, montrer que k_c est un multiple entier n de π/b avec $n > 0$. En déduire l'expression de $E_0(y)$ correspondant au mode de rang n.
3. Déterminer les composantes du champ magnétique.
4. Exprimer le nombre d'onde k en fonction de ω, c, n et b et montrer l'existence d'une fréquence de coupure f_c en-dessous de laquelle la propagation est impossible.
5. Application :
   Les ondes électromagnétiques d'un émetteur sont réfléchies par l'ionosphère et aussi par la Terre. On assimile cette propagation à la propagation dans le guide d'onde, la Terre et l'ionosphère jouant le rôle des deux plans conducteurs parfaits $y = 0$ et $y = b$ avec $b = 300$ km.
   On s'intéresse au mode $n = 1$.
   (a) Montrer que la relation de dispersion prend la forme :
   $$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right]$$
   où ω_c est une pulsation de coupure à exprimer en fonction de c et b.
   (b) Calculer numérique $f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$.
   (c) Les ondes émises par France Inter GO, de fréquence $f = 164$ kHz, peuvent-elles se propager dans l'atmosphère entre l'ionosphère et la Terre ?

Réponses : 1 : $E_0''(y) + k_c^2 E_0(y) = 0$; 2 : $E_0(y) = E_n \sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)$; 3 : $\underline{\vec{B}} = \left[\dfrac{k}{\omega}E_n \sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\vec{u}_y + \dfrac{n\pi}{b}\dfrac{E_n}{i\omega}\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\vec{u}_z\right]e^{i(\omega t - kz)}$; 4 : $\omega_c = \dfrac{n\pi c}{b}$; 5(b) : $f_c = 500$ Hz

Ondes022. Pression de radiation corpusculaire (***)

À une onde de fréquence ν et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$ on associe des photons d'énergie $E = h\nu$ et de quantité de mouvement $\vec{p} = \dfrac{h\nu}{c}\vec{u}_z = \hbar\vec{k}$ avec $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck réduite.

1. Un faisceau d'intensité I (correspondant à la moyenne de la norme du vecteur de Poynting) tombe normalement sur un conducteur plan parfait. Déterminer Φ le flux surfacique de photons, nombre de photons par unité de surface et de temps associé au faisceau.

2. D'un point de vue corpusculaire, le photon se réfléchit comme une balle sur le métal parfait (choc élastique). Justifier ce résultat en considérant la réflexion de l'onde sur le métal parfait.

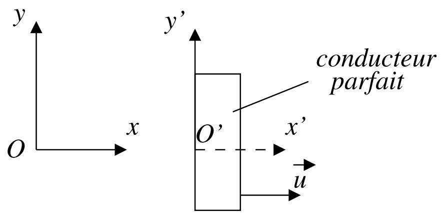
3. En effectuant un bilan de quantité de mouvement, déterminer la pression P exercée par le faisceau en fonction de I et c.
   Proposer une application numérique pour un laser de puissance $\mathcal{P} = 400$ W assimilé à un faisceau cylindrique de 3 mm de diamètre.

4. Comment est modifié ce résultat si la surface est totalement absorbante au lieu d'être réfléchissante ?

Réponses : 1 : $\Phi = \dfrac{I\lambda}{hc}$; 3 : $P = \dfrac{2I}{c} = 0,4$ Pa ; 4 : la pression est deux fois plus faible

Ondes080. Radar Doppler (**)

Lorsqu'un objet, en mouvement par rapport à un émetteur placé en O, reçoit une onde émise par ce dernier, la fréquence de réception est différente de la fréquence d'émission : c'est l'effet Doppler.
Une fraction de l'onde reçue par l'objet est renvoyée vers O où un récepteur mesure une fréquence de réception également différente de celle émise par l'objet, ce qui permet d'en déduire des informations sur la vitesse de l'objet. C'est le principe du radar.



On considère un miroir métallique plan parfaitement conducteur perpendiculaire à la direction Ox en translation par rapport au référentiel du laboratoire avec la vitesse $\vec{u} = u\vec{u}_x$.

Dans le référentiel du laboratoire, on note $\vec{E}_i = E_{0,i}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$ l'onde incidente et on cherche l'onde réfléchie sous la forme $\vec{E}_r = E_{0,r}\cos(\omega' t + k'x)\vec{u}_y$.

1. Justifier la forme retenue pour l'onde réfléchie. Quelle est la relation entre ω' et k' ?

2. On suppose que les deux repères sont confondus à l'instant initial et on note x l'abscisse d'un point M repéré dans le référentiel du laboratoire xOy. Exprimer l'abscisse x' de M dans le référentiel du véhicule.

3. En déduire les formes des champs électriques dans le référentiel du véhicule.

4. On rappelle que le champ électrique est nul au sein d'un conducteur parfait et que sa composante tangentielle est toujours continue. En imposant cette condition aux limites exprimée dans le référentiel du véhicule, montrer que :
$$\omega' = \omega\left(\frac{1 - u/c}{1 + u/c}\right)$$
   Pour toute la suite, on se contentera d'un développement à l'ordre 1 en u/c de la relation précédente qui a été obtenue par un changement classique, c'est-à-dire non relativiste, du système de coordonnées.

5. Un radar de gendarmerie émet une fréquence de 2,5 GHz et contrôle une automobile de vitesse 123 km $\cdot$ h^{-1}. Déterminer l'écart entre les fréquences émise et reçue.

Réponses : 1 : $k' = \omega'/c$; 2 : $x' = x - ut$; 3 : $\vec{E}'_i = E_{0,i}\cos([\omega - ku]t - kx')\vec{u}_y$, $\vec{E}'_r = E_{0,r}\cos([\omega' + k'u]t + k'x')\vec{u}_y$; 4 : $f' - f = -5,7 \times 10^2$ Hz