

TD14 : ondes acoustiques (correction)

Ondes008. Niveau sonore (*)

1. Si l'on triple l'amplitude de la surpression, l'intensité de l'onde est multipliée par neuf. Si on appelle I_1 l'intensité de l'onde initiale, l'onde amplifiée a une intensité sonore $I_2 = 9I_1$. C'est à dire pour le niveau sonore :

$$I_{dB,2} = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{9I_1}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_0} \right) + 10 \log 9 = I_{dB,1} + 9,5$$

Le niveau sonore augmente de 9,5 dB.

2. L'intensité sonore est associée à la norme du vecteur de Poynting :

$$I = \left\langle \|\vec{\Pi}\| \right\rangle = \frac{1}{2} \mu_0 c_s v_1^{\circ 2}$$

Le déplacement des particules de fluide s'écrit, en un point donné :

$$\xi(t) = \xi^\circ \cos(\omega t) \Rightarrow v(t) = -\omega \xi^\circ \sin(\omega t)$$

L'amplitude du champ des vitesses vaut $v_1^\circ = \omega \xi^\circ$.

En conséquence, pour le niveau sonore :

$$I_{dB} = 10 \log \left(\frac{\mu_0 c_s (2\pi \nu \xi^\circ)^2}{2I_0} \right)$$

Application numérique :

$$I_{dB} = 10 \log \left(\frac{1,2 \times 340 \times (2\pi \times 440 \times 10^{-6})^2}{2 \times 10^{-12}} \right) \Rightarrow \boxed{I_{dB} = 92 \text{ dB}}$$

Ondes010. Transmission par une paroi (**)

1. Le **milieu** étant **linéaire**, les trois ondes vibrent à la même fréquence. Le milieu étant le même des deux côtés de la paroi, la célérité des ondes est la même, on a donc un vecteur d'onde identique des deux côtés de la paroi. Les ondes incidente et transmise se propagent dans le sens des x croissants, l'onde réfléchie dans le sens des x décroissants, ce qui explique le changement de signe dans l'exponentielle.

2. Pour une onde se propageant dans le sens des x croissants :

$$\boxed{\underline{v}(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} p(x, t)}$$

3. Des deux côtés de la paroi, la vitesse du fluide est celle de la paroi, il y a donc continuité du champ des vitesses à la traversée de la paroi, c'est à dire pour $x \approx 0$, car on considère que le déplacement de la paroi est très limité

par rapport à la longueur d'onde.

$$\underline{v}_t = \underline{v}_i + \underline{v}_r \quad \text{donc} \quad \frac{\underline{a}_t}{\rho_0 c} = \frac{\underline{a}_i}{\rho_0 c} - \frac{\underline{a}_r}{\rho_0 c} \quad \text{donc} \quad \underline{a}_t = \underline{a}_i - \underline{a}_r$$

On applique la deuxième loi de Newton à la paroi ; en projection selon l'axe horizontal cette équation s'écrit :

$$m \frac{dv_x}{dt} = P(x=0^-)S - P(x=0^+)S$$

La masse de la paroi vaut $m = \sigma S$; dans l'approximation acoustique, on assimile la dérivée temporelle à la dérivée partielle par rapport au temps évaluée à l'origine, de plus la vitesse de la paroi est celle du fluide :

$$\sigma S \frac{\partial \underline{v}_t(0, t)}{\partial t} = \left(P_0 + \underline{p}_i + \underline{p}_r \right)_{x=0^-} S - \left(P_0 + \underline{p}_t \right)_{x=0^+} S$$

$$\sigma j \omega \underline{v}_t(0, t) = \left(\underline{p}_i + \underline{p}_r - \underline{p}_t \right)_{x=0} \quad \text{donc} \quad \sigma j \omega \frac{\underline{a}_t}{c \rho_0} = \underline{a}_i + \underline{a}_r - \underline{a}_t$$

On en déduit donc le système d'équations :

$$\sigma j \omega \frac{\underline{a}_t}{c \rho_0} = \underline{a}_i + \underline{a}_r - \underline{a}_t \quad \text{et} \quad \underline{a}_t = \underline{a}_i - \underline{a}_r$$

La résolution de ce système conduit à :

$$\boxed{\frac{\underline{a}_t}{\underline{a}_i} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega\sigma}{2\rho_0 c}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\underline{a}_r}{\underline{a}_i} = \frac{\frac{j\omega\sigma}{2\rho_0 c}}{1 + \frac{j\omega\sigma}{2\rho_0 c}}}$$

4. Le rapport des amplitudes transmise et incidente correspond à un **filtre passe-bas du premier ordre** de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{2\rho_0 c}{\sigma}$.
5. Le filtre est un filtre passe-bas de gain réel maximal 1. On cherche l'épaisseur d telle que :

$$G_{dB} = G_{dB}^{max} - 50 \text{ dB} = -50 \text{ dB} \quad \text{avec} \quad G_{dB} = -20 \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} \right)$$

C'est à dire $\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} = 10^{5/2}$ soit $\frac{\omega}{\omega_c} \approx 10^{5/2}$, expression que l'on peut réécrire :

$$2\pi \nu = 10^{5/2} \frac{2\rho_0 c}{\sigma}$$

Dans un modèle volumique la masse de béton vaut $m = S d \rho_b$ et dans le modèle surfacique $m = S \sigma$ donc $\sigma = \rho_b d$. On en déduit finalement :

$$d = \frac{10^{5/2} \times \rho_0 c}{\rho_b \pi \nu}$$

Application numérique : $d = \frac{10^{5/2} \times 1,29 \times 340}{2300 \times \pi \times 300}$ donc $d = 6,4 \text{ cm}$.

$2\pi\nu_c = \frac{2\rho_0 c}{\rho_b d}$ donc :

$$\nu_c = \frac{\rho_0 c}{\pi \rho_b d} = \frac{1,29 \times 300}{\pi \times 2300 \times 0,064} \quad \text{donc} \quad \nu_c \approx 1 \text{ Hz}$$

6. Les fréquences étant très grandes devant la fréquence de coupure, on peut considérer l'expression asymptotique de la fonction de transfert :

$$G_{dB} \approx -20 \log \left(\frac{\nu}{\nu_c} \right)$$

On en déduit :

$$G_{dB}(100 \text{ Hz}) = -40 \text{ dB} \quad \text{et} \quad G_{dB}(500 \text{ Hz}) = -54 \text{ dB}$$

L'atténuation est très efficace et augmente avec la fréquence. On peut cependant noter que les très basses fréquences ne sont que peu atténuées.

7. Pour des fréquences audibles de l'ordre de quelques centaines de Hz, la longueur d'onde $\lambda = c/\nu$ est de l'ordre du mètre, donc $\lambda \gg d$ et il était bien légitime de considérer un modèle surfacique.

Ondes011. Modèle de clarinette (**)

1. L'onde considérée est une onde stationnaire, il n'est donc pas possible d'utiliser la relation $P(x, t) = Zv(x, t)$ pour déterminer le champ des vitesses.

Il faut revenir à l'application de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} = P_1 k \cos(\omega t) \sin(kx) \quad \Rightarrow \quad v(x, t) = \frac{P_1 k}{\rho_0 \omega} \sin(\omega t) \sin(kx)$$

Lors de l'intégration, on ne tient pas compte d'une constante car on cherche une solution sous forme d'onde. Avec $k = \omega/c$, on obtient finalement :

$$v(x, t) = \frac{P_1}{\rho_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx)$$

2. La vitesse doit être nulle en $x = 0$. La forme du champ des vitesses est compatible avec cette condition.

Le champ de pression est la somme de la pression P_0 et du champ de surpression ; en $x = \ell$, la pression vaut P_0 :

$$P(\ell, t) = P_0 = P_0 + P_1 \cos(\omega t) \cos(k\ell) \quad \Rightarrow \quad k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\frac{\omega_n \ell}{c} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{\pi c}{2\ell} (2n + 1) \quad n \in \mathbb{N}$$

3. Pour une clarinette la pulsation fondamentale vaut $\omega_0 = \frac{\pi c}{2\ell}$.

Pour une clarinette de même longueur qu'une flûte, la fréquence fondamentale est deux fois plus basse.

4. Le trou au milieu impose $P(\ell/2, t) = P_0$. On se retrouve avec un tuyau de longueur effective $\ell_{\text{eff}} = \ell/2$, ce qui donne pour la fréquence fondamentale :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\pi c}{2\ell_{\text{eff}}} = \frac{c}{2\ell} = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad f_0 = 264 \text{ Hz}$$

Ondes012. Raccordement entre deux conduites (**)

1. $p_i(x, t) = \rho_0 c v_i(x, t)$; $p_r(x, t) = -\rho_0 c v_r(x, t)$; $p_t(x, t) = \rho_0 c v_t(x, t)$.

2. Le débit volumique est le produit de la section par la vitesse, ainsi :

$$D_{v,i} = S_1 v_i(x, t) \quad D_{v,r} = S_1 v_r(x, t) \quad D_{v,t} = S_2 v_t(x, t)$$

3. Continuité de la pression :

$$p_i(0^-, t) + p_r(0^-, t) = p_t(0^+, t)$$

Continuité du débit volumique :

$$S_1(v_i(0^-, t) + v_r(0^-, t)) = S_2 v_t(0^+, t)$$

4. On élimine les surpressions du système d'équations grâce à la relation entre surpression et vitesse, et on aboutit à :

$$t_v = \frac{v_t(0^+, t)}{v_i(0^-, t)} = \frac{2S_1}{S_1 + S_2} \quad \text{et} \quad r_v = \frac{v_r(0^-, t)}{v_i(0^-, t)} = \frac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2}$$

Et pour les surpressions :

$$t_p = \frac{p_t(0^+, t)}{p_i(0^-, t)} = \frac{2S_1}{S_1 + S_2} \quad \text{et} \quad r_p = \frac{p_r(0^-, t)}{p_i(0^-, t)} = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}$$

5. Le vecteur de Poynting a pour expression générale : $\vec{\Pi} = p\vec{v}$.

Les puissances incidente, réfléchie et transmise, au niveau du raccordement,

$$\text{ont donc pour expression : } |\mathcal{P}_i| = |p_i(0^-, t)v_i(0^-, t)S_1| \\ |\mathcal{P}_r| = |p_r(0^-, t)v_r(0^-, t)S_1| \quad |\mathcal{P}_t| = |p_t(0^+, t)v_t(0^+, t)S_2|$$

Et donc pour le rapport des puissances :

$$R = \left| \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i} \right| = \left| \frac{p_r(0^-, t)v_r(0^-, t)}{p_i(0^-, t)v_i(0^-, t)} \right| \quad \text{donc} \quad R = \left(\frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \right)^2$$

$$T = \left| \frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_i} \right| = \left| \frac{p_t(0^+, t)v_t(0^+, t)S_2}{p_i(0^-, t)v_i(0^-, t)S_1} \right| \quad \text{donc} \quad T = \frac{4S_1 S_2}{(S_1 + S_2)^2}$$

Notons que l'on retrouve bien $R + T = 1$ qui représente la conservation de l'énergie, l'énergie incidente se partageant entre l'énergie réfléchie et celle transmise.

6. Cas particulier :

★ Pour $S_2 \gg S_1$ ou $S_2 \ll S_1$, $R \approx 1$ et $T \approx 0$; si les deux conduites ont des sections très différentes, la transmission est très peu efficace, l'onde est essentiellement réfléchie.

★ Pour $S_1 = S_2$, $R = 0$ et $T = 1$; comme $S_1 = S_2$, il n'y a donc qu'une seule conduite et la transmission est parfaite.

Un porte-voix est ainsi muni d'un pavillon dans la section varie progressivement afin de favoriser la transmission de l'onde.

Ondes072. Modes propres d'une cavité sphérique (*)**

1. On reporte la forme proposée pour la surpression dans l'équation de d'Alembert :

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f(r) e^{i\omega t}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f(r) e^{i\omega t}) = \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r f(r)] + \frac{\omega^2}{c^2} f(r) \right] e^{i\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \forall r \in]0, a[, \frac{d^2}{dr^2} [r f(r)] + \frac{\omega^2}{c^2} r f(r) = 0$$

L'application $g : r \rightarrow r f(r)$ vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\boxed{g''(r) + k^2 g(r) = 0} \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}.$$

2. La solution de l'équation de l'oscillateur harmonique est de la forme :

$$\forall r \in]0, a[, r f(r) = \underline{A} \cos(kr) + \underline{B} \sin(kr)$$

On en déduit : $\forall r \in]0, a[, \forall t, \underline{p}(r, t) = \left[\frac{\underline{A} \cos(kr)}{r} + \frac{\underline{B} \sin(kr)}{r} \right] e^{i\omega t}.$

La surpression ne pouvant diverger en $r = 0$, on a $\underline{A} = 0$, en conséquence :

$$\boxed{\forall r \in]0, a[, \forall t, \underline{p}(r, t) = \frac{\underline{B} \sin(kr)}{r} e^{i\omega t}}$$

3. On applique l'équation d'Euler en régime forcé et en géométrie sphérique :

$$\mu \times i\omega \underline{v} = -\frac{\partial p}{\partial r} = -\underline{B} e^{i\omega t} \left[\frac{k \cos(kr)}{r} - \frac{\sin(kr)}{r^2} \right]$$

C'est à dire : $\boxed{\forall r \in]0, a[, \forall t, \underline{v}(r, t) = \frac{i\underline{B}}{\mu\omega} e^{i\omega t} \left[\frac{k \cos(kr)}{r} - \frac{1}{r^2} \sin(kr) \right]}$.

Notons qu'un développement limité à l'origine montre que la vitesse est bien définie et nulle à l'origine.

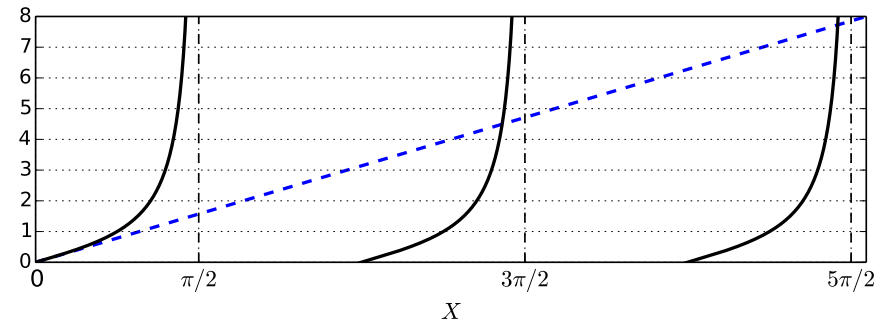
4. La vitesse doit être nulle à la paroi en $r = a$, ce qui impose :

$$\underline{v}(a^-, t) = 0 = -\frac{1}{a^2} \sin(ka) + \frac{k}{a} \cos(ka) \Leftrightarrow \tan(ka) = ka$$

Avec $k = \frac{\omega}{c}$, on en déduit que les pulsations propres vérifient :

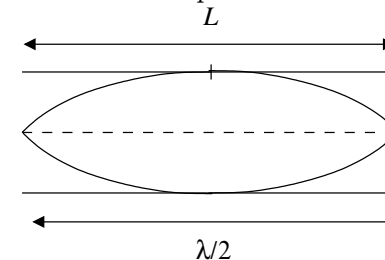
$$\boxed{\tan\left(\frac{\omega_n a}{c}\right) = \frac{\omega_n a}{c}}$$

5. On considère les applications $h : X \rightarrow \tan(X)$ et $g : X \rightarrow X$, les intersections dans l'intervalle associé à $X > 0$ donne les pulsations solutions :



Ondes076. Flûte et clarinette ()**

1. Si la flûte est ouverte aux deux extrémités, en ces points la pression est égale à la pression atmosphérique et la surpression est nulle. Les extrémités de la flûte sont associées à des nœuds de surpression, ce qui donne pour le mode fondamental et la forme de la surpression :



On a : $\lambda = \frac{c}{f} = 2L$, c'est à dire :

$$L = \frac{c}{2f} = \frac{340}{2 \times 264} \Rightarrow \boxed{L = 64 \text{ cm}}$$

La célérité du son dans l'air s'exprime selon $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ et donc en considérant une fluctuation relative faible de la température :

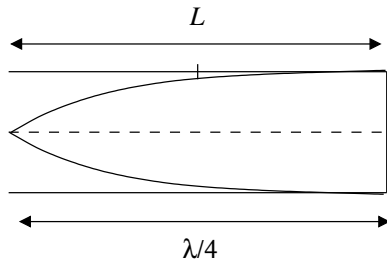
$$f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \Rightarrow \boxed{\frac{df}{f} = \frac{1}{2} \times \frac{dT}{T}}$$

Application numérique :

$$\Delta f = 264 \times \frac{1}{2} \times \frac{-10}{298} \Rightarrow \boxed{\Delta f = -4,4 \text{ Hz}}$$

2. À l'extrémité ouverte, il y a un nœud de surpression ; à l'extrémité fermée, il y a un nœud de vitesse.

Pour une onde stationnaire, un nœud de vitesse correspond à un ventre de surpression ; en effet d'après la relation : $\mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$, un cosinus spatial est transformé en sinus. On obtient finalement pour le mode fondamental et la forme de la surpression :



On a : $\lambda = \frac{c}{f} = 4L$, c'est à dire :

$$f = \frac{c}{4L} = \frac{340}{4 \times 0,64} \Rightarrow \boxed{f = 132 \text{ Hz}}$$

Ondes071. Résonateur de Helmholtz (**)

On applique la relation de la dynamique à la bille soumise aux forces de pression, à la réaction du support et au poids. En projection selon \vec{u}_x , on obtient :

$$m\ddot{x} = pS - p_0S$$

Pour la transformation adiabatique d'un gaz parfait, on applique la relation de Laplace :

$$p_0 V_0^\gamma = p V^\gamma \Leftrightarrow p = p_0 \frac{V_0^\gamma}{V^\gamma} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + xS} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{1}{1 + xS/V_0} \right)^\gamma$$

Ce qui donne à l'ordre 1 en x : $p \approx p_0 \left(1 - \frac{\gamma xS}{V_0} \right)$.

On reporte cette expression dans la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\ddot{x} = -p_0 \frac{\gamma S^2}{V_0} x \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{p_0 \gamma S^2}{m V_0} x = 0}$$

C'est à dire pour la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{p_0 \gamma S^2}{m V_0}}$.

Ondes086. Trombone de Kœnig (Oral CCP et ESM 2018, **)

Les ondes passant respectivement par les tubes T_1 et T_2 interfèrent au niveau du microphone.

Raisonnement :

Un minimum d'amplitude correspond à une situation pour laquelle les deux ondes sont en opposition de phase, par exemple une phase nulle $[2\pi]$ (et fixée) pour l'onde 1 et une phase égale à π $[2\pi]$ pour l'onde 2.

Lors du déplacement du tube T_2 , la distance parcourue par l'onde 2 est modifiée, ce qui modifie son état de phase au niveau du microphone.

Le passage par un nouveau minimum implique une variation de phase de 2π pour l'onde 2 et donc dans le cas présent de deux minima $\Delta\phi = 4\pi$, relation (1).

D'autre part, un déplacement de d du tube T_2 implique une distance supplémentaire parcourue égale à $2d$ pour l'onde 2 et donc un déphasage :

$$\Delta\phi = k \times 2d = \frac{2\pi}{\lambda} \times 2d \quad \text{relation (2)}$$

Par comparaison des deux relations, on en déduit $d = \lambda$ avec $\lambda = c/f$.

Raisonnement plus rapide : le décalage de deux minima implique un décalage spatial de 2λ correspondant à la distance supplémentaire $2d$ parcourue.

La fréquence n'étant pas modifiée, on obtient, compte tenu de la formule donnant la célérité du son dans l'air :

$$\frac{d'}{d} = \frac{c'}{c} \Rightarrow \boxed{d' = d \sqrt{\frac{T'}{T}}}$$

$$\text{A.N. : } d' = 55 \times \sqrt{\frac{273 + 27}{273}} \Rightarrow \boxed{d' \approx 58 \text{ cm}}$$