TD13 : Propagation unidimensionnelle (correction)

Ondes001. La corde vibrante (*)

1. $\boxed{c = \sqrt{F/\mu}}$ avec F la tension et μ la masse linéique.
   Homogénéité : $\left[\dfrac{T}{\mu}\right] = \dfrac{[T]}{[\mu]} = \dfrac{\mathrm{M\cdot L\cdot T^{-2}}}{\mathrm{M\cdot L^{-1}}} = \mathrm{L^2\cdot T^{-2}}$
   La tension est égale au poids de la masse m placée après la poulie, ce qui impose :
   $$c^2 = \frac{mg}{\mu} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{c^2\mu}{g} = \frac{(108/3,6)^2\times 2\times 10^{-3}}{9,81} \quad \boxed{m = 0,18 \text{ kg}}$$
2. On peut proposer deux expressions pour la masse m :
   $\rightarrow$ modèle linéique : $m = \mu \times l$; $\rightarrow$ modèle volumique : $m = \rho \times \dfrac{\pi d^2}{4} \times l$
   La correspondance des deux modèles impose $\mu = \rho\dfrac{\pi d^2}{4}$, on en déduit :
   $$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{4T}{\rho\pi d^2}} = \sqrt{\frac{4\times 800}{7,8\times 10^3\times\pi\times 10^{-6}}} \quad \boxed{c = 3,6\times 10^2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$
   Pour une corde fixée à ses deux extrémités, les pulsations des modes propres sont données par $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{l}$ et donc pour la fréquence minimale :
   $$f_{min} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{c}{2l} = \frac{361}{2\times 0,41} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{min} = 440 \text{ Hz}}$$
   Il s'agit de la note « La ».
3. Impédance d'une corde
   (a) La perturbation se propage à la célérité c le long de la corde ; en l'absence de dissipation, l'état de l'excitateur se reproduit en x avec un retard $\tau = x/c$:
   $$\boxed{y(x,t) = a\sin\left(\omega\left[t - \frac{x}{c}\right]\right)}$$
   (b) La vitesse d'un point de la corde a pour expression :
   $$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = a\omega\cos\left(\omega\left[t-\frac{x}{c}\right]\right)$$
   Pour une corde souple, la tension est tangente à la corde :
   $$T_y = T_0\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -T_0 a\frac{\omega}{c}\cos\left(\omega\left[t-\frac{x}{c}\right]\right)$$
   Le rapport de la tension (l'excitation) sur la vitesse (la réponse) est bien une constante et constitue l'impédance de la corde :
   $$Z = \frac{T_y}{v} = -\frac{T_0}{c} = -\frac{c^2\mu}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z = -\mu c}$$
   Dans le cas d'une onde progressive allant dans le sens des x décroissants, l'argument est de la forme $\omega(t + x/c)$, donc $Z = \mu c$.

Ondes055. Masselotte et corde vibrante (**)

La présence de la masselotte donne *a priori* naissance à une onde réfléchie et une onde transmise. Le milieu étant linéaire, l'excitation à la pulsation ω génère des réponses à la même pulsation. Les deux morceaux de corde étant identiques, $k = \omega/c$ est identique pour chacune des ondes, on peut alors proposer :

$$\forall\, x < 0, \quad \underline{y}(x,t) = y_{0,i}e^{j(\omega t - kx)} + \underline{y}_{0,r}e^{j(\omega t + kx)}$$
$$\forall\, x > 0, \quad \underline{y}(x,t) = \underline{y}_{0,t}e^{j(\omega t - kx)}$$

On a nécessairement $\forall\, t,\ y(0^-,t) = y(0^+,t)$ (la corde ne casse pas), ce qui impose :
$$y_{0,i} + \underline{y}_{0,r} = \underline{y}_{0,t} \quad (1)$$

On applique ensuite la relation fondamentale de la dynamique à la masse située en $x = 0$ en projection selon la verticale :
$$m\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial t^2} = T_y(0^+,t) - T_y(0^-,t) = T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{0^+,t} - T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{0^-,t}$$

Ce qui donne, en notation complexe :
$$-m\omega^2\underline{y}_{0,t} = T_0\left[-jk\underline{y}_{0,t} - \left(-jky_{0,i} + jk\underline{y}_{0,r}\right)\right]$$

On en déduit : $\underline{y}_{0,t}\left[jkT_0 - m\omega^2\right] = jkT_0\left[y_{0,i} - \underline{y}_{0,r}\right] \quad (2)$

En combinant les relations (1) et (2), on en déduit :
$$\boxed{\underline{r} = \frac{\underline{y}_{0,r}}{y_{0,i}} = \frac{m\omega^2}{2jkT_0 - m\omega^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{t} = \frac{\underline{y}_{0,t}}{y_{0,i}} = \frac{2jkT_0}{2jkT_0 - m\omega^2}}$$

Étude des cas limites :

- $m \to 0$: $\underline{r} \to 0$ et $\underline{t} \to 1$. En l'absence de masse, le milieu est homogène et l'onde est transmise sans atténuation ni déphasage. Il n'y a pas d'onde réfléchie.
- $m \to +\infty$: $\underline{r} \to -1$ et $\underline{t} \to 0$. L'inertie infinie de la masse ne permet pas de mettre la seconde partie de la corde en mouvement, l'onde est totalement réfléchie en opposition de phase.

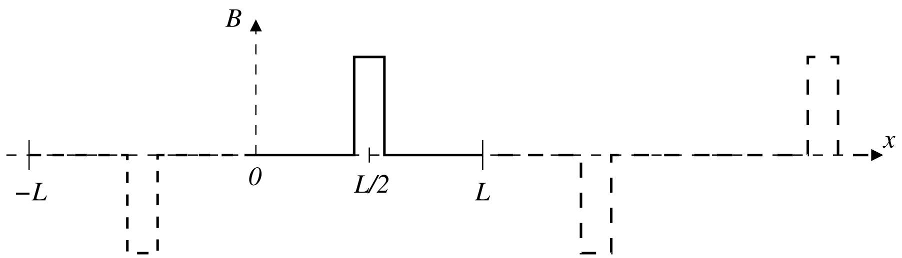
Ondes066. Corde soumise au actions de Laplace (**)

1. On applique la relation fondamentale de la dynamique à un élément de corde de longueur dx soumis aux forces de tension et à la force de Laplace. On considère cette relation en projection sur l'axe vertical ascendant Oy :
$$\mu dx\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial\psi}{\partial x}(x+dx,t) - T_0\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t) + \left(i\vec{dl}\wedge\vec{B}\right).\vec{u}_y$$
On en déduit : $\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - i_0B_0\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$. C'est à dire :
$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \alpha\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)}$$

2. La corde étant fixée à ses deux extrémités, il est logique de chercher une solution sous forme d'ondes stationnaires qui vibrent au rythme de l'excitation. Reportons la solution proposée au sein de l'équation : $\forall\ x\in\,]0,L[\,,\ \forall\ t$,
$$-\frac{\pi^2}{L^2}\psi_0\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t+\varphi) = -\frac{\omega^2}{c^2}\psi_0\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t+\varphi) + \alpha\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$$
La relation devant être vérifiée à tout instant, ceci impose nécessairement $\varphi = 0$, c'est à dire :
$$\forall\ x\in\,]0,L[\,,\ \left(-\frac{\pi^2}{L^2}\psi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\psi_0 - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = 0$$
C'est à dire : $\psi_0 = \frac{\alpha}{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{L^2}}$, soit : $\boxed{\psi(x,t) = \frac{\alpha}{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{L^2}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)}$.

On constate que la corde peut entrer en résonance (maximum d'amplitude) pour $\omega = \frac{\pi c}{L}$ qui correspond comme on l'a vu en cours à la fréquence fondamental des modes propres de la corde fixée à ses deux extrémités.

3. L'idée est d'étendre la fonction décrivant le champ B, en la rendant impaire, et périodique selon le schéma suivant :



Ainsi la fonction est périodique, de période $2L$, et impaire, elle est développable en série de Fourier selon :
$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\left(\frac{n\times 2\pi x}{2L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
dont on ne cherche pas à identifier les coefficients a_n.

L'équation étant linéaire, la solution est obtenue en sommant les solutions pour chacun des harmoniques du champ B, ce qui donne d'après le résultat précédent :
$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_n}{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$$
Le système entre en résonance pour toutes les pulsations multiples de la fréquence fondamentale : $\boxed{\omega_n = \frac{n\pi c}{L}}$ à condition que le coefficient a_n du développement de B ne soit pas nul.

Dans le cas présent, en excitation le système au centre de la corde, on ne pourra pas observer les harmoniques pairs qui présentent des nœuds de vibration en $x = L/2$.

Ondes068. Corde de piano (***)

1. L'harmonique de rang 7 possède un nœud de vibration en $L/7$, ce qui est incompatible avec le déplacement de la corde en ce point.

2. Dans le cadre des hypothèses de la corde vibrante, la vibration verticale vérifie une équation de d'Alembert :
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$
La corde étant fixée à ses deux extrémités, on cherche une solution en onde stationnaire $\psi(x,t) = f(x)g(t)$. On en déduit, en reportant dans l'équation de d'Alembert :
$$f''(x) + k^2f(x) = 0 \quad\text{et}\quad g''(t) + \omega^2g(t) = 0 \quad\text{avec}\quad k = \frac{\omega}{c}$$
Ce qui donne : $\forall t\ ,\forall x\in]0,L[,\quad \psi(x,t) = C\cos(kx+\varphi_x)\cos(\omega t+\varphi_t)$.

La corde étant fixée à ses deux extrémités : $\psi(0^+,t) = \psi(L^-,t) = 0$. La première condition impose par exemple $\varphi_x = -\pi/2$, la seconde condition impose $\sin(kL) = 0$, c'est à dire $k_nL = n\pi$, en conséquence :
$$\forall t\ ,\forall x\in]0,L[,\quad \psi_n(x,t) = C_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t+\varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\quad \forall n\in\mathbb{N}^\star$$

La partie temporelle pouvant tout aussi bien se réécrire à l'aide d'un cosinus et d'un sinus. Enfin l'équation étant linéaire, la solution générale s'obtient comme combinaison linéaire des solutions précédentes :

$$\boxed{\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

3. En $t = 0^+$, la corde est à l'équilibre, c'est à dire :

$$\forall x \in [0, L], \quad \psi(x, 0^+) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

L'application $f : x \to f(x) = \psi(x, 0^+) = 0$ étant identiquement nulle, chacun des coefficients du développement est nul : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ a_n = 0}$.

La seconde condition initiale porte sur la vitesse, en s'autorisant à permuter dérivée et somme infinie, on obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \times \frac{n\pi c}{L} \times \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

C'est à dire : $\dfrac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0^+) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \times \frac{n\pi c}{L} \times \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Compte tenu de l'indication de l'énoncé, on peut écrire :

$$b_n \times \frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0^+) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_a^{a+e} u \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2u}{n\pi c} \times \frac{-L}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_a^{a+e} = \frac{-2uL}{n^2\pi^2 c} \left[\cos\left(\frac{n\pi(a+e)}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\right]$$

$$\boxed{b_n = \frac{4uL}{n^2\pi^2 c} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\left[a + \frac{e}{2}\right]\right) \sin\left(\frac{n\pi e}{2L}\right)}$$

4. Avec $a = L/7$, le coefficient du mode n s'écrit (avec $e \ll L$) :

$$b_n \simeq \frac{4uL}{n^2\pi^2 c} \sin\left(\frac{n\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{n\pi e}{2L}\right)$$

On constate que $\boxed{b_7 = 0}$.

5. L'amplitude du mode n est donnée par : $\psi_n(x,t) = b_n \sin\left(\dfrac{n\pi c}{L}t\right) \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$, ce qui donne pour la vitesse locale de la corde

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t}(x,t) = b_n \times \frac{n\pi c}{L} \times \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

C'est à dire pour l'énergie cinétique d'un élément de corde de longueur dx :

$$\delta E_{c,n} = \frac{1}{2}\mu dx \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial t}(x,t)\right)^2$$

On obtient l'énergie cinétique du mode n en intégrant sur la longueur de la corde :

$$E_{c,n} = \int_0^L \delta E_c = \frac{\mu}{2} \times b_n^2 \times \frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

C'est à dire, en moyenne dans le temps :

$$\langle E_{c,n} \rangle = \frac{\mu}{2} \times b_n^2 \times \frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} \left\langle \cos^2\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\rangle \times \frac{L}{2}$$

$$\langle E_{c,n} \rangle = \frac{\mu}{2} \times \frac{16u^2L^2}{n^4\pi^4 c^2} \times \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{L}{2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}\left[a + \frac{e}{2}\right]\right) \sin^2\left(\frac{n\pi e}{2L}\right)$$

On en déduit pour l'énergie cinétique moyenne du mode n :

$$\boxed{\langle E_{c,n} \rangle = \frac{2\mu u^2 L}{n^2\pi^2} \sin^2\left(\frac{n\pi e}{2L}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}\left[a + \frac{e}{2}\right]\right)}$$

Ondes069. Étude d'une ligne bifilaire (**)

1. Cf. cours avec $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}}$.

2. La loi d'additivité des tensions conduit à : $0 = \Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Considérons une solution de l'équation de propagation sous la forme d'une onde progressive harmonique se déplaçant vers les x croissants :

$$\underline{u}(x,t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{i}(x,t) = \underline{i}_0^+ e^{j(\omega t - kx)}$$

La loi d'additivité des tensions conduit à :

$$0 = \Lambda j\omega \underline{i}_0^+ - jk\underline{u}_0^+ \quad \Rightarrow \quad \underline{u}_0^+ = \Lambda c \times \underline{i}_0^+ = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \times \underline{i}_0^+$$

C'est à dire : $\boxed{Z_c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}}$. Pour une onde dans le sens des x décroissants : $\boxed{Z_c = -\sqrt{\Lambda/\Gamma}}$

3. Une onde incidente progressive harmonique se propage vers les x croissants en direction de l'impédance de bout de ligne :

$$\underline{u}^+(x,t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - kx)}$$

Cette onde se réfléchit sur l'impédance terminale donnant naissance à une onde retour $\underline{u}^-(x,t) = \underline{u}_0^- e^{j(\omega t + kx)}$.

L'onde de tension au sein de la ligne est la superposition des deux ondes incidente et réfléchie :

$$\underline{u}(x,t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - kx)} + \underline{u}_0^- e^{j(\omega t + kx)}$$

L'onde de courant s'obtient à l'aide de l'impédance caractéristique appliquée à chacune des ondes progressives :

$$\underline{i}(x,t) = \frac{\underline{u}_0^+}{Z_c} e^{j(\omega t - kx)} - \frac{\underline{u}_0^-}{Z_c} e^{j(\omega t + kx)}$$

En bout de ligne, $\underline{u}(0,t) = \underline{Z} \times \underline{i}(0,t)$ vraie $\forall t$ impose :

$$\underline{u}_0^+ + \underline{u}_0^- = \frac{\underline{Z}}{Z_c}\underline{u}_0^+ - \frac{\underline{Z}}{Z_c}\underline{u}_0^- \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\rho}_u = \frac{\underline{u}_0^-}{\underline{u}_0^+} = \frac{\underline{Z} - Z_c}{\underline{Z} + Z_c}}$$

Avec $\underline{u}_0^+ = Z_c \underline{i}_0^+$ et $\underline{u}_0^- = -Z_c \underline{i}_0^-$, on en déduit le coefficient de réflexion en courant :

$$\underline{\rho}_i = \frac{\underline{i}_0^-}{\underline{i}_0^+} = -\frac{\underline{u}_0^-}{\underline{u}_0^+} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\rho}_i = \frac{\underline{i}_0^-}{\underline{i}_0^+} = \frac{Z_c - \underline{Z}}{\underline{Z} + Z_c}}$$

4. En $x = 0^-$, pour l'onde incidente : $\underline{u}^+(x,t) = \underline{u}_0^+ e^{j\omega t}$ et $\underline{i}^+(x,t) = \underline{i}_0^+ e^{j\omega t}$; l'impédance caractéristique de la ligne étant réelle, la tension et l'intensité de l'onde incidente sont en phase sur la ligne, ce qui donne pour la puissance moyenne associée à l'onde incidente : $P_i = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi) = \frac{|\underline{u}_0^+|\,|\underline{i}_0^+|}{2}$. De même, on obtient pour la puissance réfléchie en moyenne vers les $x < 0$: $P_r = \frac{|\underline{u}_0^-|\,|\underline{i}_0^-|}{2}$. On en déduit le coefficient de réflexion en énergie :
$$R = \frac{P_r}{P_i} = \frac{|\underline{u}_0^-|}{|\underline{u}_0^+|} \times \frac{|\underline{i}_0^-|}{|\underline{i}_0^+|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \left|\frac{Z_c - \underline{Z}}{\underline{Z} + Z_c}\right|^2}$$
Pour un fil $\underline{Z} = 0$, comme pour un circuit ouvert ($|\underline{Z}| \to +\infty$), $R \to 1$, la totalité de la puissance incidente est réfléchie. En effet dans les deux cas de figure, le dipôle de sortie n'absorbe pas d'énergie (tension ou intensité nulles à ses bornes).
Dans le cas d'une adaptation d'impédance $\underline{Z} = Z_c$, $R = 0$ l'énergie est absorbée en totalité par le dipôle.

5. Pour une ligne court-circuitée en $x = 0$, $\rho_u = -1$. Pour une onde incidente de la forme : $\underline{u}^+(x,t) = u_0^+ e^{j(\omega t - kx)}$, l'onde réfléchie a pour expression : $\underline{u}^-(x,t) = -u_0^+ e^{j(\omega t + kx)}$, ce qui donne pour l'onde résultante de tension :

$$\underline{u}(x,t) = \underline{u}^+(x,t) + \underline{u}^-(x,t) = u_0^+ e^{j(\omega t - kx)} - u_0^+ e^{j(\omega t + kx)} = u_0^+ e^{j\omega t}\left[e^{-jkx} - e^{jkx}\right]$$
$$\underline{u}(x,t) = -2j u_0^+ e^{j\omega t} \sin(kx)$$

C'est à dire, pour la grandeur réelle : $\boxed{u(x,t) = 2u_0^+ \sin(\omega t)\sin(kx)}$.

On détermine alors l'onde d'intensité en reprenant l'équation de la loi des mailles :

$$\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -2u_0^+ \sin(\omega t) \times k\cos(kx) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{2u_0^+ k}{\Lambda}\sin(\omega t) \times \cos(kx)$$

On intègre alors l'équation, on ne tient pas compte de la constante car on cherche une solution ondulatoire :

$$\forall t\ , \forall x < 0, \quad i(x,t) = \frac{2u_0^+ k}{\Lambda\omega}\cos(kx)\cos(\omega t) = \frac{2u_0^+}{\Lambda c}\cos(kx)\cos(\omega t)$$

On en déduit avec $c = 1/\sqrt{\Lambda\Gamma}$: $\boxed{i(x,t) = \frac{2u_0^+}{Z_c}\cos(kx)\cos(\omega t)}$.

La superposition des deux ondes progressives de même amplitude en sens opposé génère une **onde stationnaire**.

Ondes006. Chaîne d'atomes (**)

1. On s'intéresse à la propagation d'une onde acoustique dans un solide ; la perturbation a lieu dans la direction de propagation, les ondes sont longitudinales. Dans les solides, la célérité du son est de l'ordre du km/s.

2. On applique la relation fondamentale de la dynamique à l'atome n soumis à l'action des ressorts auxquels il est attaché :
$$m\ddot{\xi}_n(t) = -k\left[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)\right] + k\left[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)\right]$$
$$\boxed{m\ddot{\xi}_n(t) = k\left[\xi_{n+1}(t) + \xi_{n-1}(t) - 2\xi_n(t)\right]}$$

3. Dans l'approximation des milieux continus, on peut effectuer un développement limité en a de la fonction $\xi(x)$:
$$\xi_{n+1}(t) = \xi(x = na + a, t) = \xi(x = na, t) + a\frac{\partial \xi}{\partial x}_{|x=na} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}_{|x=na}$$
De même : $\xi_{n-1}(t) = \xi(x = na, t) - a\frac{\partial \xi}{\partial x}_{|x=na} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}_{|x=na}$
En reportant dans la relation fondamentale de la dynamique, on en déduit :
$$m\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = ka^2\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$$

Dans l'approximation des milieux continus, l'équation de propagation des déformations de la chaîne d'atomes couplés est l'équation de d'Alembert à une dimension ; la célérité c est caractéristique du milieu :

$$\boxed{\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}}$$

Ondes074. Vibrations longitudinales d'une lame (**)

1. Le plan situé en x au repos se trouve en $x+\xi(x,t)$ à l'instant t, le plan situé en $x+dx$ au repos se trouve en $x+dx+\xi(x+dx,t)$ à l'instant t, la tranche a donc pour nouvelle épaisseur :

$$x+dx+\xi(x+dx,t) - x + \xi(x,t) = dx + [\xi(x+dx,t) - \xi(x,t)] = dx + \frac{\partial\xi}{\partial x}dx$$

   La tranche d'épaisseur dx au repos s'est donc allongée de $\boxed{\delta(dx) = \frac{\partial\xi}{\partial x}dx}$.

2. D'après l'énoncé, la force est proportionnelle au module d'Young, à l'aire de la surface et à la variation relative de longueur, en conséquence :

$$\boxed{F(x,t) = ES\frac{\delta(dx)}{dx} = ES\frac{\partial\xi}{\partial x}}$$

3. On applique alors un principe fondamental de la dynamique à la tranche précédemment considérée. On se limite à l'ordre le plus bas non nul en ξ :

$$\rho \times S \times dx\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = F(x+dx,t) - F(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dx = ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$$

   On en déduit :

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{c_l^2 = \frac{E}{\rho}}$$

4. En reportant la solution proposée :

$$\forall t,\ \forall x \in \,]0,L[\,,\ f''(x)g(t) - \frac{1}{c_l^2}f(x)g''(t) = 0 \quad (1)$$

   On se place en un point x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$, c'est à dire :

$$\forall t,\quad g''(t) = c_l^2\frac{f''(x_0)}{f(x_0)}g(t) = cste \times g(t)$$

   Pour obtenir une solution temporelle stable, la constante doit être négative, on pose $cste = -\omega^2$.
   La solution générale est de la forme : $g(t) = G_0\cos(\omega t + \varphi_t)$.

   En reportant l'expression $g''(t) = -\omega^2 g(t)$ dans la relation (1), on obtient :

$$\forall x \in \,]0,L[\,,\ f''(x) + k^2 f(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

   Cette équation différentielle admet pour solution : $f(x) = f_0\cos(kx+\varphi_x)$.

   On en déduit : $\boxed{\xi(x,t) = \xi_0\cos(kx+\varphi_x)\cos(\omega t+\varphi_t)}$.

5. La formule précédente conduit à :

$$\forall t,\ \forall x \in]0,L[\quad \frac{\partial\xi}{\partial x} = -\xi_0 k\sin(kx+\varphi_x)\cos(\omega t+\varphi_t)$$

   La force étant nulle aux extrémités, cela impose :

$$\forall t,\ \frac{\partial\xi}{\partial x}(x=0^+,t) = \frac{\partial\xi}{\partial x}(x=L^-,t) = 0$$

   C'est à dire : $\sin(\varphi_x) = 0$ et $\sin(kL+\varphi_x) = 0$. On retient : $\varphi_x = 0$ et :

$$k_nL = \frac{\omega_n}{c_l}L = n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f_n = \frac{nc_l}{2L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^\star}$$

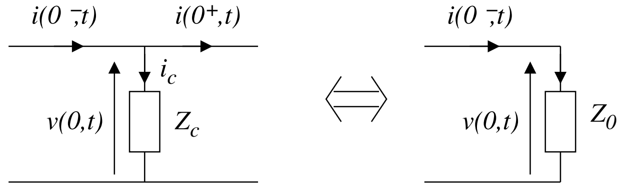
6. Calculons la fréquence fondamentale dans le cas d'une vibration longitudinale :

$$f_1 = \frac{1}{2L}\times c_l = \frac{1}{2L}\times\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{1}{2\times 0,243}\times\sqrt{\frac{19,5\times10^{10}}{8,7\times10^3}} \qquad \underline{f_1 = 9,7\ \text{kHz}}$$

   La fréquence fondamentale, et *a fortiori* celles des harmoniques, est très supérieure à la fréquence du son émis. La fréquence émise ne résulte pas d'une vibration longitudinale.

Ondes004. Suppression d'une onde réfléchie (**)

1. Présence d'une impédance Z_c en parallèle :
   (a) Commençons par dessiner le circuit au voisinage de l'origine :



   La loi des nœuds impose : $\underline{i}(0^-,t) = \underline{i}(0^+,t) + \underline{i}_c$.
   Pour le dipôle d'impédance Z_c, on a nécessairement $\underline{v}(0,t) = Z_c \times \underline{i}_c$.
   Dans le domaine $x > 0$, on est en présence d'une unique onde progressive dans le sens des x croissants, la relation entre l'onde de tension et l'onde de courant vaut : $\underline{v}(0,t) = Z_c \times \underline{i}(0^+,t)$ avec Z_c l'impédance de la ligne.
   En reportant ces résultats dans la loi des nœuds, on obtient :

$$\underline{i}(0^-,t) = \frac{\underline{v}(0,t)}{Z_c} + \frac{\underline{v}(0,t)}{Z_c} = \frac{2}{Z_c}\underline{v}(0,t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{v}(0,t) = \frac{Z_c}{2}\times\underline{i}(0^-,t)}$$

L'ensemble constitué de l'impédance Z_c et du reste de la ligne est bien vu comme une impédance $\boxed{Z_0 = Z_c/2}$.

(b) On utilise les expressions de l'onde de courant et de l'onde de tension fournie dans l'énoncé que l'on applique en $x = 0^-$:

$$\underline{v}(0^-, t) = \frac{Z_c}{2}\underline{i}(0^-, t) \quad \Leftrightarrow \quad Z_c\underline{I_1} - Z_c\underline{I_2} = \frac{Z_c}{2} \times (\underline{I_1} + \underline{I_2})$$

Ce qui donne pour le coefficient de réflexion en courant :

$$\boxed{\rho = \frac{\underline{I_2}}{\underline{I_1}} = \frac{1}{3}}$$

2. Ajout d'un court-circuit

(a) La présence du court-circuit en $x = a$ impose la présence d'une onde réfléchie sur la portion entre $x = 0$ et $x = a$:

$$\boxed{\underline{i}(x,t) = \underline{I_3}e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I_4}e^{j(\omega t + kx)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{v}(x,t) = Z_c\underline{I_3}e^{j(\omega t - kx)} - Z_c\underline{I_4}e^{j(\omega t + kx)}}$$

(b) La présence du court-circuit en $x = a$ impose :

$$\forall t, \quad 0 = \underline{v}(a,t) = Z_c\underline{I_3}e^{j(\omega t - ka)} - Z_c\underline{I_4}e^{j(\omega t + ka)} \quad \Rightarrow \quad \underline{I_3} = \underline{I_4} \times e^{2jka}$$

On reporte ce résultat dans l'expression du courant en $x = 0^+$:

$$\underline{i}(0^+, t) = \underline{I_4}e^{j\omega t}\left(e^{2jka} + 1\right)$$

Un courant nul en $x = 0^+$ conduit à :

$$2ka_p = (2p+1)\pi \quad \Leftrightarrow a_p = \frac{(2p+1)\pi}{2k} = \frac{(2p+1)\pi}{2 \times 2\pi/\lambda} = \frac{(2p+1)\lambda}{4}$$

On retient la plus petite valeur $\boxed{a_0 = \lambda/4}$.

(c) Avec $i(x = 0^+, t) = 0$, le raisonnement de la première partie conduit à $v(0^-, t) = Z_c i(0^-, t)$. Il y a adaptation d'impédance, l'onde incidente perçoit une impédance égale à l'impédance de ligne, il n'y a pas d'onde réfléchie, $\boxed{\rho = 0}$.