TD13 : Propagation unidimensionnelle non dispersive

Propagation le long d'une corde

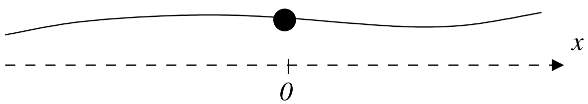
Ondes001. La corde vibrante (*)

1. Rappeler l'expression de la célérité c des ondes sur une corde et en vérifier l'homogénéité. Quelle masse faut-il accrocher à l'extrémité d'une corde de Melde de masse linéique $2,0\ \text{g}\cdot\text{m}^{-1}$ pour que les ondes s'y propagent à la vitesse de $108\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$?
2. Calculer la célérité c des ondes sur une corde d'acier de masse volumique $\rho = 7,8\times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, de diamètre $d = 1,0$ mm, tendue par une tension $T = 800$ N. Si la longueur de la corde est $\ell = 41$ cm, quelle est la fréquence propre la plus basse émise ?
3. Une corde de très grande longueur se confond au repos avec l'axe Ox. À son extrémité $x = 0$, on lui communique un mouvement transversal suivant l'axe Oy d'amplitude $y(x,t) = a\sin(\omega t)$.
   (a) Quel est, à l'abscisse $x > 0$, le déplacement $y(x,t)$ de la corde sachant que la célérité des ondes produites est c ?
   (b) La vitesse d'un point de la corde et la projection sur Oy de la tension (force exercée par un élément de droite sur un élément de gauche) sont notées $v(x,t)$ et $T_y(x,t)$.
   Pour l'onde progressive de la question a), montrer que $Z = \dfrac{T_y(x,t)}{v(x,t)}$ est une grandeur constante et vaut $Z = -\mu c$ avec μ la masse linéique de la corde.
   Que devient ce rapport si l'onde sinusoïdale se propage selon les x décroissants ?

Réponses : 1 : $c = \sqrt{T/\mu}$, $m = 0,18$ kg ; 2 : $c = 3,6\times 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $f_{min} = 440$ Hz ; 3(a) : $y(x,t) = a\sin\left(\omega\left[t - \dfrac{x}{c}\right]\right)$; 3(b) : $Z = -\mu c$

Ondes055. Masselotte et corde vibrante (**)

On considère une corde souple sur laquelle on a enfilé une perle de masse m. On négligera le poids de la masse vis à vis des forces de tension.



On envoie une onde de la forme $\underline{y}_i(x,t) = y_{0,i}e^{j(\omega t - kx)}$ sur la corde.
Déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.
Étudier les cas limites pertinents.

Réponses : $\underline{r} = \dfrac{y_{0,r}}{y_{0,i}} = \dfrac{m\omega^2}{2jkT_0 - m\omega^2}$, $\underline{t} = \dfrac{y_{0,t}}{y_{0,i}} = \dfrac{2jkT_0}{2jkT_0 - m\omega^2}$

Ondes066. Corde soumise au actions de Laplace (**)

On considère une corde sans raideur, de masse linéique μ, de longueur L, tendue avec une tension T_0 très supérieure à son poids. La corde au repos est située entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ d'un axe horizontal Ox ; elle est fixée aux deux extrémités. On note $\psi(x,t)$ le déplacement vertical de la corde dans le plan xOy et $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$ la célérité des ondes se propageant le long de la corde.

La corde est parcourue par un courant $i(t) = I_0\cos(\omega t)$ et est placée dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)\vec{e}_z$.

1. Établir l'équation d'onde vérifiée par $\psi(x,t)$. On note $\alpha = \dfrac{I_0 B_0}{T_0}$.
2. On cherche une solution stationnaire sous la forme :
$$\psi(x,t) = \psi_0\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t + \varphi)$$
   Déterminer complètement $\psi(x,t)$ et montrer qu'il y a, pour une valeur de ω à préciser, résonance de la corde.
3. Le champ magnétique est en réalité crée par un aimant en U dont l'entrefer a une largeur $e < L$ et qui crée avec une bonne approximation un champ $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ uniforme entre $\dfrac{L-e}{2}$ et $\dfrac{L+e}{2}$, nul à l'extérieur de cet intervalle.
   Montrer, sans développer les calculs, qu'il y a potentiellement résonance pour toutes les pulsations propres de la corde.

Réponses : 1 : $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \alpha\sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$; 2 : $\psi(x,t) = \dfrac{\alpha}{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{L^2}}\sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$; 3 : $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}$, $n \in \mathbb{N}^\star$

Ondes068. Corde de piano (***)

On considère une corde sans raideur, de masse linéique μ, de longueur L, tendue avec une tension T_0 très supérieure à son poids. La corde au repos est située entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ d'un axe horizontal Ox ; elle est fixée aux deux extrémités. On note $\psi(x,t)$ le déplacement vertical de la corde et $c = \sqrt{T_0/\mu}$ la célérité des ondes se propageant le long de la corde.

La corde est frappée à $t = 0$ par un petit marteau de largeur $e \ll L$ entre les abscisses a et $a + e$, ce qui communique aux points de la corde en contact avec le marteau une vitesse u transversale à partir de la position d'équilibre, et une vitesse nulle pour les autres points.

1. Justifier sans calcul qu'en frappant en $a = L/7$ l'harmonique de rang 7 ne sera pas généré.
2. Montrer que la solution de l'équation de d'Alembert pour une corde fixée à ses deux extrémités prend la forme générale :
$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
3. On admettra que pour une fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, le coefficient a_p est donné par :
$$a_p = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$
Déterminer les coefficients a_n et b_n en utilisant les conditions initiales.
4. La corde de piano est frappée au 7^{ieme} de sa longueur $a = L/7$. Montrer que cela permet d'éliminer l'harmonique de rang 7.
5. Le spectre d'intensité sonore est proportionnel à l'énergie cinétique moyenne de la corde. Montrer que cette énergie cinétique moyenne vaut pour le mode n :
$$\langle E_{c,n}\rangle = \frac{2\mu u^2 L}{n^2\pi^2}\sin^2\left(\frac{n\pi e}{2L}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi}{L}\left[a + \frac{e}{2}\right]\right)$$

Réponses : 3 : $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{4uL}{n^2\pi^2 c}\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}\left[a + \dfrac{e}{2}\right]\right)\sin\left(\dfrac{n\pi e}{2L}\right)$

Câble coaxial

Ondes069. Étude d'une ligne bifilaire (**)

On considère une ligne sans perte dont un élément de longueur dx est modélisé comme indiqué sur le schéma ci-après.

1. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ obéissent à l'équation de d'Alembert et exprimer la célérité c correspondante.
2. Un générateur placé en entrée de la ligne délivre une tension sinusoïdale de pulsation ω.
On se place en régime forcé et on utilise la notation complexe.

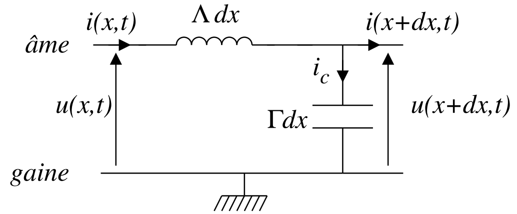


schéma électrique de la ligne

Dans le cas d'une onde plane progressive se propageant dans le sens des x croissants, montrer que le rapport $\dfrac{\underline{u}(x,t)}{\underline{i}(x,t)}$ est une constante Z_c ne dépendant que des caractéristiques de la ligne.
Exprimer le même rapport dans le cas d'une onde plane progressive se propageant dans le sens des x décroissants.

3. La ligne est fermée en $x = 0$ avec un dipôle d'impédance $\underline{Z}$.
Exprimer les coefficients de réflexion en amplitude $\underline{\rho}_i$ pour les courants et $\underline{\rho}_u$ pour les tensions, en fonction de $\underline{Z}$ et Z_c.
4. Exprimer le coefficient de réflexion énergétique R, rapport de la puissance moyenne réfléchie sur la puissance moyenne incidente, en valeur absolue. Discuter la valeur de R selon le type de dipôle placé en sortie.
5. On court-circuite la ligne en $x = 0$. Une onde plane progressive sinusoïdale est émise en $x = -\infty$.
Exprimer $u(x,t)$ et $i(x,t)$ en tout point de la ligne. De quelle nature est l'onde obtenue ?

Réponses : 1 : $c = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$; 2 : $Z_c = \pm\sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$; 3 : $\underline{\rho}_u = \dfrac{\underline{u}_0^-}{\underline{u}_0^+} = \dfrac{\underline{Z} - Z_c}{\underline{Z} + Z_c}$, $\underline{\rho}_i = \dfrac{\underline{i}_0^-}{\underline{i}_0^+} = \dfrac{Z_c - \underline{Z}}{\underline{Z} + Z_c}$; 4 : $R = \left|\dfrac{Z_c - \underline{Z}}{\underline{Z} + Z_c}\right|^2$; 5 : $u(x,t) = 2u_0^+\sin(\omega t)\sin(kx)$, $i(x,t) = \dfrac{2u_0^+}{Z_c}\cos(kx)\cos(\omega t)$

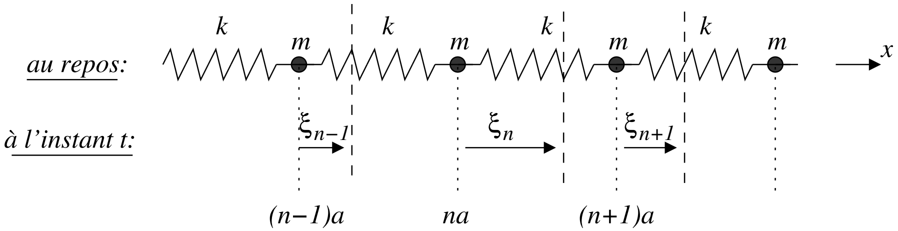
Pour aller plus loin

Ondes006. Chaîne d'atomes (**)

On considère une chaîne d'atomes, tous identiques, de masse m, reliés entre eux par des ressorts de raideur k ; au repos, l'atome « n » est situé à l'abscisse $n \times a$ et on appelle $\xi_n(t)$ le déplacement par rapport à l'équilibre à un instant quelconque.

Cette représentation constitue un modèle simple, à 1 dimension, pour décrire la propagation de petits mouvements vibratoires au sein d'un solide :
$\star$ un solide est un empilement réguliers d'entités microscopiques,

⋆ au voisinage d'une position d'équilibre, les interactions peuvent être modélisées par des forces de rappel élastiques.



1. De quel type d'onde est-il question dans cette modélisation ? Ces ondes sont-elles longitudinales ou transversales ? Quel est l'ordre de grandeur de la célérité c ?
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à l'atome n, montrer que :
$$m\ddot{\xi}_n(t) = k\left[\xi_{n+1}(t) + \xi_{n-1}(t) - 2\xi_n(t)\right]$$
3. Dans un solide, la distance a entre les entités est de l'ordre de quelques dixièmes de nanomètre, tandis que la « taille caractéristique » de l'onde acoustique (sa longueur d'onde) est de l'ordre du mètre.
Dans ces conditions, $\xi_n(t)$ et $\xi_{n+1}(t)$ ont nécessairement des valeurs très voisines.

   On définit alors une fonction continue de l'espace et du temps $\xi(x,t)$ qui coïncide avec $\xi_n(t)$ pour $x = na$:
$$\xi(x = na, t) = \xi_n(t)$$

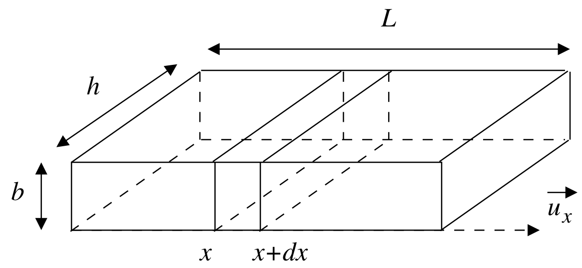
   En effectuant un développement à l'ordre 2 de $\xi_{n+1}(t)$ et $\xi_{n-1}(t)$, montrer que :
$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = 0$$
Avec c à exprimer en fonction de a, k et m.

Réponses : 3 : $c = \sqrt{\dfrac{ka^2}{m}}$

Ondes074. Vibrations longitudinales d'une lame (**)

On envisage pour l'instant les vibrations longitudinales d'une lame de longueur L. La matière située au repos dans le plan d'abscisse x se met en mouvement suite à une excitation.

Elle occupe à l'instant t le parallélépipédique plan d'abscisse $x + \xi(x,t)$ et est soumise, de la part de la matière située à sa droite, à une force $\vec{F} = F(x,t)\vec{u}_x$. On note ρ la masse volumique et E le module d'Young du matériau dont on rappelle la définition : pour porter de ℓ_0 à $\ell_0 + \delta\ell$ la longueur d'une tige de section S, il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $ES\delta\ell/\ell_0$.



1. On considère la tranche de matériau comprise au repos entre x et $x+\mathrm{d}x$. Exprimer son allongement $\delta(\mathrm{d}x)$ en fonction d'une dérivée partielle de $\xi(x,t)$.
2. En déduire l'expression de $F(x,t)$ en fonction d'une dérivée partielle de $\xi(x,t)$.
3. En appliquant un principe fondamental de la dynamique à la tranche précédemment considérée, montrer que $\xi(x,t)$ obéit à l'équation de d'Alembert et exprimer la célérité c_ℓ des ondes longitudinales.
4. Rechercher des solutions sinusoïdales de la forme $\xi(x,t) = f(x)g(t)$ en explicitant les fonctions f et g. On introduira une pulsation temporelle ω et une pulsation spatiale k.
5. Les deux extrémités de la lame n'étant soumises à aucune force, montrer que seules certaines valeurs particulières, indexées par un entier n, sont accessibles à k. Exprimer les fréquences propres f_n de la lame.
6. L'acier possède un module d'Young $E = 19,5 \times 10^{10}$ Pa et une masse volumique $\rho = 8,7 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Une lame de glockenspiel en acier de longueur $L = 24,3$ cm émet un son de fréquence égale à 785 Hz.
Montrer qu'il ne peut pas résulter de l'excitation d'une onde longitudinale.

Réponses :
1 : $\delta(\mathrm{d}x) = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\mathrm{d}x$; 2 : $F(x,t) = ES\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$; 3 : $c_\ell^2 = \dfrac{E}{\rho}$; 4 : $\xi(x,t) = \xi_0\cos(kx + \varphi_x)\cos(\omega t + \varphi_t)$ avec $k = \omega/c_\ell$; 5 : $f_n = \dfrac{nc_\ell}{2L}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$; 6 : $f_1 = 9,7$ kHz

Ondes004. Suppression d'une onde réfléchie (**)

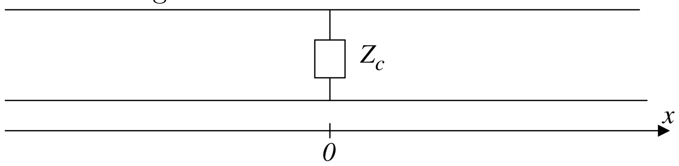
Une ligne électrique, sans pertes et d'impédance caractéristique Z_c, est alimentée par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω.
De manière générale, la ligne est parcourue par un courant $i(x,t)$ qui s'écrit en notation complexe (pour $x < 0$) :

$$\underline{i}(x,t) = \underline{I}_1 e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_2 e^{j(\omega t + kx)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

La tension $v(x,t)$ s'écrit alors :

$$\underline{v}(x,t) = Z_c \underline{I}_1 e^{j(\omega t - kx)} - Z_c \underline{I}_2 e^{j(\omega t + kx)}$$

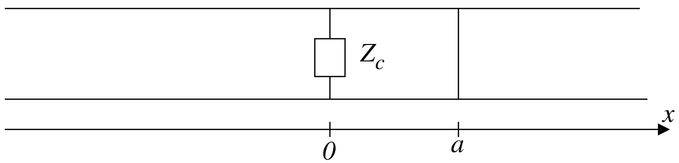
1. La ligne s'étend de $x = -\infty$ à $x = +\infty$. Une impédance Z_c est placée en $x = 0$, en parallèle sur la ligne, et on s'intéresse à l'onde de courant dans la partie $x < 0$ de la ligne.



   (a) Montrer que cette onde « voit » en $x = 0$ une impédance équivalente $Z_0 = Z_c/2$.

   (b) Définir et calculer ρ le coefficient de réflexion en courant de l'onde en $x = 0$.

2. On modifie le circuit précédent en plaçant un court-circuit en parallèle sur la ligne à l'abscisse $x = a$.



   (a) Proposer une forme pour l'onde de courant et l'onde de tension entre $x = 0$ et $x = a$.

   (b) Montrer qu'il existe une valeur minimale a_0 de a telle que le courant s'annule pour $x = 0^+$.
   Exprimer a_0 en fonction de la longueur λ de l'onde de courant dans la ligne.

   (c) En déduire, dans ces conditions, le coefficient de réflexion ρ et la forme de l'onde dans la partie négative de la ligne.

Réponses : 1(a) : $\underline{v}(0,t) = \frac{Z_c}{2} \times \underline{i}(0^-,t)$; 1(b) : $\rho = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{1}{3}$;
2(a) : $\underline{i}(x,t) = \underline{I}_3 e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_4 e^{j(\omega t + kx)}$, $\underline{v}(x,t) = Z_c \underline{I}_3 e^{j(\omega t - kx)} - Z_c \underline{I}_4 e^{j(\omega t + kx)}$; 2(b) : $a_0 = \lambda/4$;
2(c) : $\rho = 0$