

## TD11 : conversion électromécanique (correction)

### CP016. Couple exercé sur une barre mobile (\*)

1. On appelle  $H_{int}$  l'excitation magnétique moyenne au sein du matériau et  $H_{ext}$  l'excitation magnétique dans l'entrefer.

Le contour en pointillé a une longueur  $\ell$  dans le matériau ferromagnétique et  $a\theta$  dans l'entrefer. L'application du théorème d'Ampère sur le contour en pointillé qui enlace les  $N$  spires conduit à :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_{int} \times \ell + H_{ext} \times a\theta = Ni$$

Le champ magnétique étant à flux conservatif, la canalisation des lignes de champ impose l'égalité du flux magnétique à travers toute section droite du matériau de section constante :

$$B_{int}S = B_{ext}S \Rightarrow B_{int} = B_{ext}$$

Avec  $B_{ext} = \mu_0 H_{ext}$  et  $B_{int} = \mu_0 \mu_r H_{int}$ , la relation déduite du théorème d'Ampère prend la forme :

$$\frac{B_{ext}}{\mu_0 \mu_r} \ell + \frac{B_{ext}}{\mu_0} a\theta = Ni \Rightarrow \boxed{B_{ext} = \frac{\mu_0 Ni}{\ell/\mu_r + a\theta}}$$

Comme  $B_{int} = B_{ext}$ , on détermine le flux du champ magnétique à travers le bobinage :

$$\Phi = B_{int}NS \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell/\mu_r + a\theta} \times i$$

et donc pour l'inductance propre :  $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell/\mu_r + a\theta}$

2. L'énergie magnétique stockée dans le système vaut :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} Li^2$$

Le couple qui s'exerce sur la partie mobile s'obtient en dérivant l'énergie magnétique par rapport à  $\theta$  à intensité constante.

$$\Gamma = \left( \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial \theta} \right)_{i=cste} \Rightarrow \boxed{\Gamma = -\frac{a\mu_0 N^2 S i^2}{2(\ell/\mu_r + a\theta)^2}}$$

### CP072. Pic de courant dans un relais à palette (\*\*).

1. La première étape consiste à déterminer l'inductance propre du dispositif qui permettra de déterminer l'énergie magnétique et la force magnétique ainsi que l'équation électrique.

→ **Inductance propre** : on note avec un indice  $f$  les grandeurs au sein du matériau ferromagnétique et avec un indice  $e$  les grandeurs dans le vide.

À section constante, la conservation du flux magnétique et l'absence de fuite magnétique impose  $B = B_f = B_e$ .

On applique le théorème d'Ampère à l'excitation magnétique sur un contour incluant le matériau ferromagnétique et l'entrefer :

$$H_f \times \ell + H_e \times 2x(t) = Ni(t)$$

Avec  $B_f = \mu_0 \mu_r H_f$  et  $B_e = \mu_0 H_e$ , on en déduit :

$$B = \frac{\mu_0 Ni(t)}{\ell/\mu_r + 2x(t)}$$

On peut alors en déduire le flux propre à travers les  $N$  spires :

$$\Phi_p = NBS = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell/\mu_r + 2x(t)} i(t) \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell/\mu_r + 2x(t)}$$

→ **Équation mécanique** :

On applique la relation fondamentale de la dynamique à la palette. Une fois le support horizontal quitté, la palette est soumise à son poids et à la force électromagnétique, ce qui donne en projection sur l'axe vertical descendant :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg + \left( \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial x} \right)_{i=cste} = mg + \frac{1}{2} \frac{dL(x)}{dx} i^2$$

C'est à dire :  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - \frac{\mu_0 N^2 S i^2}{(\ell/\mu_r + 2x)^2}$ .

→ **Équation électrique** :

Le bobinage subit un phénomène d'induction et l'équation électrique s'écrit :

$$U = Ri - e = Ri + \frac{d(Li)}{dt} = Ri + \frac{dL}{dt} i + L \frac{di}{dt} = Ri + \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt} i + L \frac{di}{dt}$$

C'est à dire :

$$\boxed{U = Ri + \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell/\mu_r + 2x} \times \left[ \frac{di}{dt} - \frac{2i}{\ell/\mu_r + 2x} \frac{dx}{dt} \right]}$$

On est bien en présence d'un système d'équations différentielles couplées.

## 2. Première étape : montée du courant

Dans un premier temps, le courant doit croître dans le circuit afin de créer une force électromagnétique suffisante pour compenser le poids et permettre à la palette de monter.

On peut donc considérer dans un premier temps que la distance  $x$  reste fixée à  $e$  et le circuit électrique est un simple circuit  $RL_0$  qui subit un échelon de tension avec une constante de temps :

$$\tau_0 = \frac{L_0}{R} = \frac{\mu_0 N^2 S}{R(\ell/\mu_r + 2e)} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 500^2 \times 0,020}{10 \times (1,5/200 + 2 \times 0,04)} \approx 7 \text{ ms}$$

Ceci semble cohérent avec la montée initiale du courant en quelques dixièmes de seconde et une immobilité mécanique.

### Seconde étape : mouvement mécanique

Sous l'effet de la force électromagnétique, la palette vient coller à l'aimant en  $U$  ; la baisse du courant peut s'interpréter comme une conséquence de la loi de Lenz, le système réagissant en tentant de contrer l'effet qui lui a donné naissance.

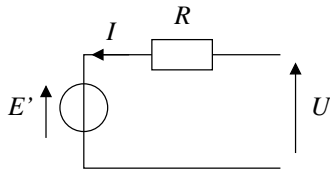
### Troisième étape : seconde montée du courant

On se trouve à nouveau en présence d'un simple circuit  $RL_1$  avec une inductance  $L_1 > L_0$  et une constante de temps :

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R} = \frac{\mu_0 N^2 S}{R(\ell/\mu_r)} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 500^2 \times 0,020}{10 \times 1,5/200} \approx 84 \text{ ms}$$

## CP065. Caractéristiques d'un moteur à courant continu (\*\*)

En fonctionnement moteur, à condition de négliger l'inductance propre, la partie électrique du rotor est modélisée par une résistance et une force contre électromotrice soumise à la tension d'excitation, selon le schéma :



Ce qui donne pour l'équation électrique  $U = RI + E'$  (exacte en régime permanent, approchée en régime transitoire à condition de négliger les effets d'inductance propre)

→ *Premier essai* : pour cet essai (à ne pas prolonger pour éviter l'échauffement de la résistance), le rotor est bloqué, on a donc  $E' = \Phi_0 \Omega = 0$  et l'équation électrique devient :  $U = RI$ . Une moyenne sur les trois mesures conduit à :  $R = 5,98 \Omega$ .

→ *Troisième essai* : en présence de la seule force de frottement fluide, l'équation mécanique pour le rotor s'écrit :

$$J_\Delta \frac{d\Omega}{dt} = -\lambda \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\Omega}{\tau_1} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_1 = \frac{J_\Delta}{\lambda}$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$\Omega(t) = \Omega_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \Rightarrow t_{1/2} = \tau_1 \ln(2)$$

On en déduit :

$$\lambda = \frac{J_\Delta \ln(2)}{t_{1/2}} = \frac{1,0 \times 10^{-5} \times \ln(2)}{6,9} \Rightarrow \lambda = 1,0 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

→ *Quatrième essai* : pour cet essai, le rotor est soumis au couple moteur  $\Gamma = \Phi_0 i$  et au couple de frottement fluide. Le théorème du moment cinétique en projection selon l'axe de rotation conduit à :

$$J_\Delta \frac{d\Omega}{dt} = \Phi_0 i - \lambda \Omega$$

On combine avec l'équation électrique (en négligeant l'inductance propre) :

$$U = Ri + E' = Ri + \Phi_0 \Omega \quad \Leftrightarrow \quad i = \frac{U - \Phi_0 \Omega}{R}$$

On en déduit :

$$\frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{J_\Delta} \left( \lambda + \frac{\Phi_0^2}{R} \right) \Omega = \frac{U \Phi_0}{R J_\Delta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\Omega}{\tau} = \frac{\Omega_\infty}{\tau}$$

Par identification, on peut en déduire la constante de couplage :

$$\frac{U \Phi_0}{R J_\Delta} = \frac{\Omega_\infty}{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_0 = \frac{\Omega_\infty R J_\Delta}{U \tau}$$

Application numérique :

$$\Phi_0 = \frac{860 \times 2\pi/60 \times 5,98 \times 1,0 \times 10^{-5}}{3 \times 6,0 \times 10^{-2}} \Rightarrow \Phi_0 = 30 \text{ mWb}$$

→ *Deuxième essai* : en régime stationnaire, l'équilibre des couples moteur et résistant, conduit à :  $\lambda \Omega = \Phi_0 I$ .

Avec les valeurs obtenues, on peut déterminer l'intensité et la tension aux bornes de la résistance pour la série d'expériences :

$U$ (V)	2,00	4,00	6,00
$\Omega$ (tours/min)	584	1169	1753
$I$ (mA)	2,0	4,1	6,1
$RI$ (mV)	12	25	36

On constate que, pour le rotor en rotation, la chute de tension aux bornes de la résistance est négligeable devant la tension d'excitation et que la tension du générateur se reporte quasiment en totalité sur la force contre électromotrice :

$$U \approx E' = \Phi_0 \Omega \Rightarrow \Phi_0 = \frac{U}{\Omega}$$

On obtient des valeurs de l'ordre  $\Phi_0 \approx 32$  mWb, en cohérence avec le résultat précédent.

### CP019. Treuil (\*\*)

1. L'induit consomme une puissance  $P_i = UI$  :

$$I = \frac{P_i}{U} = \frac{16,2 \times 10^3}{200} \Rightarrow \boxed{I = 81 \text{ A}}$$

2. L'inducteur se comporte comme une résistance  $U = R_s I_s$  :

$$I_s = \frac{U}{R_s} = \frac{200}{40} \Rightarrow \boxed{I_s = 5,0 \text{ A}}$$

3. À l'aide du schéma électrique de l'induit, on obtient :

$$e' = U - rI = 200 - 0,075 \times 81 \Rightarrow \boxed{e' = 194 \text{ V}}$$

4. La force contre-électromotrice reçoit une puissance :

$$P_{\text{fcm}} = e'I = 194 \times 81 \Rightarrow P_{\text{fcm}} = 15,7 \text{ kW}$$

Compte-tenu des pertes au sein du moteur, la puissance utile vaut :

$$P_u = P_{\text{fcm}} - P_C \Rightarrow \boxed{P_u = 14,8 \text{ kW}}$$

5. La puissance utile du moteur vaut  $P_u$ , pour cela le moteur consomme la puissance électrique délivrée aux niveaux des enroulements de l'induit et de l'inducteur :

$$\rho_m = \frac{P_u}{P_i + R_s I_s^2} = \frac{14800}{16200 + 40 \times 5^2} \Rightarrow \boxed{\rho_m = 86\%}$$

6. Compte tenu du rendement du treuil :  $P_{\text{meca}} = \rho_{\text{tr}} P_u$ , cette puissance sert à faire monter la masse à la vitesse  $v$  :

$$\rho_{\text{tr}} P_u = mgv \Rightarrow m = \frac{\rho_{\text{tr}} P_u}{gv} = \frac{0,77 \times 14800}{9,81 \times 3} \Rightarrow \boxed{m = 387 \text{ kg}}$$

### CP020. MCC en régime transitoire (\*\*)

1. À vide, le seul couple résistant est le couple de pertes mécaniques. En régime permanent le couple moteur doit équilibrer le couple de pertes :

$$C_p = KI_0 \text{ donc } K = \frac{C_p}{I_0} = \frac{1,23}{1,8} \Rightarrow \boxed{K = 0,68 \text{ Wb}}$$

2. En régime permanent l'équation électrique de l'induit s'écrit :

$$U_n = RI_0 + E' \text{ donc } E' = U_n - RI_0 = 109,1 \text{ V}$$

La force contre-électromotrice est liée à la vitesse angulaire selon la relation

$E' = K\Omega$ , on en déduit :

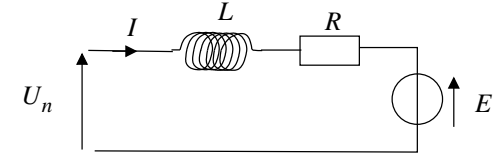
$$\Omega = \frac{U_n - RI_0}{K} = \frac{110 - 0,5 \times 1,8}{0,68} \Rightarrow \boxed{\Omega = 160 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

3. Régime transitoire :

(a) Le rotor est soumis au couple moteur  $C = Ki$ , au couple représentant les pertes mécaniques et au couple de charge. Le théorème du moment cinétique appliqué au rotor le long de l'axe de rotation conduit à :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = Ki - (C_p + C_r)$$

(b) Le schéma électrique de l'induit est :



Avec  $E' = K\Omega$ , on en déduit, d'après la loi des mailles :

$$U_n = K\Omega + Ri + L \frac{di}{dt}$$

(c) En présence de la charge, la puissance électrique apportée au niveau de l'induit augmente, ce qui se caractérise par une augmentation de l'intensité. Très généralement, la vitesse angulaire est une fonction décroissante du couple de charge.

En présence d'une bobine le courant dans l'induit est nécessairement continu :  $I(0) = I_0 = 1,8$  A. La vitesse angulaire, liée à l'énergie cinétique de rotation, est elle-aussi continue (seul un couple infiniment grand pourrait la faire varier instantanément) :  $\Omega(0) = 160 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

En régime permanent les grandeurs sont indépendantes du temps. L'équation mécanique se simplifie selon :

$$i_\infty = \frac{C_p + C_r}{K} = \frac{13 + 1,23}{0,68} \Rightarrow \boxed{i_\infty = 20,9 \text{ A}}$$

De même pour l'équation électrique :

$$\Omega_\infty = \frac{U_n - Ri_\infty}{K} = \frac{110 - 20,9 \times 0,5}{0,68} \Rightarrow \boxed{\Omega_\infty = 146 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

4. Étude simplifiée :

(a) En l'absence de l'inductance propre, l'équation électrique se simplifie selon :  $U_n = Ri_0 + K\Omega_0$ , expression que l'on reporte dans l'équation mécanique :

$$J \frac{d\Omega_0}{dt} = K \left( \frac{U - K\Omega_0}{R} \right) - (C_p + C_r) \quad \Omega_0 + \frac{RJ}{K^2} \frac{d\Omega_0}{dt} = \frac{U}{K} - \frac{R}{K^2} (C_p + C_r) = \Omega_\infty$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$\Omega_0(t) = \Omega_\infty + Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RJ}{K^2}$$

Avec  $\Omega_0(0) = 160,4 \text{ rad/s}$ , on en déduit numériquement :

$$\Omega_0(t) = 14,06 \exp(-t/\tau) + 146,38$$

- (b) L'inductance propre ne joue un rôle qu'en régime transitoire ( $L \frac{di}{dt}$ ), les valeurs finales, associées au régime permanent, ne sont pas affectées.

La présence de l'inductance propre tend à s'opposer à la variation du courant,  $\forall t, i(t) \leq i_0(t)$  en particulier dans les premiers instants. L'inductance propre lisse l'augmentation du courant dans l'induit.

Comme  $C = Ki$ , un courant plus faible entraîne un couple moteur réduit et donc, pour un même couple résistant, une vitesse angulaire un peu plus faible,  $\forall t, \Omega(t) \leq \Omega_0(t)$ .

### CP021. Alternateur connecté à un réseau de distribution (\*\*\*)

- La tension et l'intensité sont déphasées de  $\varphi$ , ce qui donne pour la puissance moyenne fournie :  $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$ .

La puissance est positive pour  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

$P$  et  $U_{\text{eff}}$  étant fixées, l'augmentation du facteur de puissance permet de **diminuer l'intensité et les pertes en ligne**.

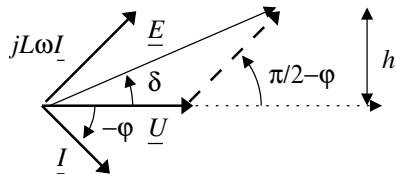
- En tenant compte des orientations du circuit, la loi d'additivité des tensions s'écrit sur les grandeurs complexes :

$$\underline{U} = -jL\omega\underline{I} - R\underline{I} + \underline{E} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{E} = \underline{U} + R\underline{I} + jL\omega\underline{I}$$

- En négligeant la chute de tension aux bornes de la résistance, l'expression précédente s'écrit :

$$\underline{E} = \underline{U} + jL\omega\underline{I}$$

En prenant l'origine des phases sur la tension, l'image de  $\underline{U}$  est alignée sur l'axe des abscisses ; on passe de  $\underline{I}$  à  $jL\omega\underline{I}$  par une rotation de  $+\pi/2$ .

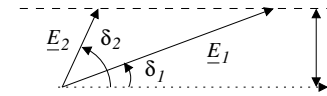


- Les composantes sur l'axe vertical de  $jL\omega\underline{I}$  et  $\underline{E}$  sont égales, ce qui s'écrit :

$$h = E \sin(\delta) = IL\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = L\omega I \cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad E_{\text{eff}} \sin(\delta) = L\omega I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

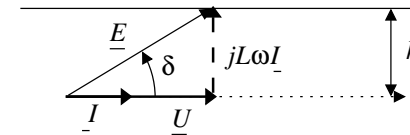
Sachant que  $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$ , on obtient  $E_{\text{eff}} \sin(\delta) = \frac{L\omega P}{U_{\text{eff}}}$ .

À puissance et tension fixées, la relation précédente montre que  $E_{\text{eff}} \sin(\delta) = \text{cste}$ . Comme  $E_{\text{eff}} = kI_e$ , lorsque  $I_e$  change,  $\delta$  s'ajuste de telle sorte que  $E_{\text{eff}} \sin(\delta)$  reste constante ; sur le diagramme de Fresnel, l'extrémité de l'image de  $\underline{E}$  se déplace sur l'horizontale  $h = \text{cste}$ .



D'après le diagramme de Fresnel, quand  $\varphi$  diminue,  $\delta$  augmente et  $E_{\text{eff}}$  diminue. Comme  $E_{\text{eff}} = kI_e$ , une diminution de l'intensité dans l'inducteur, permet de diminuer  $\varphi$  et d'augmenter le facteur de puissance.

- Pour le facteur de puissance optimal,  $\varphi = 0$ , et le diagramme de Fresnel prend la forme :



Le théorème de Pythagore conduit à :  $E_{\text{eff}}^2 = U_{\text{eff}}^2 + (L\omega I_{\text{eff}})^2$ , c'est à dire, avec  $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  (car  $\cos(\varphi) = 1$ ) :

$$I_e = \frac{E_{\text{eff}}}{K} = \frac{1}{K} \sqrt{U_{\text{eff}}^2 + \left(\frac{L\omega P}{U_{\text{eff}}}\right)^2} \quad \text{et} \quad \tan(\delta) = \frac{L\omega I_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}} = \frac{L\omega P}{U_{\text{eff}}^2}$$

### CP074. Machine synchrone (\*\*).

- L'axe de l'enroulement du rotor fait un angle  $\theta$  avec l'axe de la phase  $B_1$  du stator et un angle  $\pi/2 - \theta$  avec l'axe de la phase  $B_2$  du stator ; l'inductance mutuelle étant maximale lorsque les axes sont alignées, on peut donc proposer pour les inductances mutuelles :

$$M_{1r}(t) = \hat{M} \cos(\theta(t)) \quad \text{et} \quad M_{2r}(t) = \hat{M} \cos(\pi/2 - \theta(t)) = \hat{M} \sin(\theta(t))$$

- Pour exprimer l'énergie magnétique, il faut tenir compte des termes d'inductance propre et des termes d'inductance mutuelle. Il n'y a pas à tenir compte de mutuelle entre les deux phases du stator car leurs axes sont perpendiculaires :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_r I_r^2 + \frac{1}{2} L_s i_{s1}^2 + \frac{1}{2} L_s i_{s2}^2 + \hat{M} \cos(\theta) I_r i_{s1} + \hat{M} \sin(\theta) I_r i_{s2}$$

3. On obtient le couple en dérivant l'énergie magnétique par rapport à l'angle repérant le rotor et ceci à courants fixés :

$$C(t) = \frac{\partial E_{mag}}{\partial \theta} = \hat{M} \times [-\sin(\theta(t))] \times I_r i_{s1}(t) + \hat{M} I_r i_{s2}(t) \times [\cos(\theta(t))]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C(t) = \hat{M} I_r [\cos(\theta(t)) i_{s2}(t) - \sin(\theta(t)) i_{s1}(t)]}$$

4. Étude électrique :

- (a) Avec  $\theta(t) = \Omega t$  et les expressions proposées pour les courants statoriques, le couple magnétique prend la forme :

$$C(t) = \hat{M} I_r \hat{I}_s [\cos(\Omega t) \sin(\Omega t - \varphi) - \sin(\Omega t) \cos(\Omega t - \varphi)] = \hat{M} I_r \hat{I}_s \sin(-\varphi)$$

$$\text{C'est à dire : } C(t) = -\hat{M} I_r \hat{I}_s \sin(\varphi) \Rightarrow \boxed{C = -\hat{C} \sin(\varphi)}$$

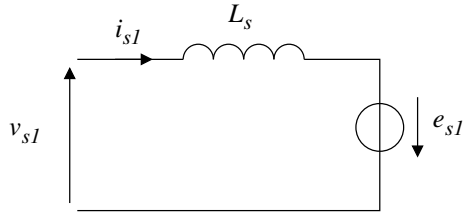
Le flux du champ rotorique à travers la phase  $B_1$  du stator s'exprime à l'aide de l'inductance mutuelle selon  $\Phi_{mut,1} = M_{1r}(t) I_r = \hat{M} \cos(\Omega t) I_r$ , ce qui donne pour la fem de mutuelle inductance :

$$e_{s1}(t) = -\frac{d\Phi_{mut,1}}{dt} = \Omega \hat{M} I_r \sin(\Omega t) \Rightarrow \boxed{e_{s1}(t) = \hat{E}_s \sin(\Omega t)}$$

Avec la même méthode :

$$e_{s2}(t) = -\frac{d}{dt} (\hat{M} I_r \sin(\Omega t)) \Rightarrow \boxed{e_{s2}(t) = -\hat{M} \Omega I_r \cos(\Omega t)}$$

- (b) La phase ( $B_1$ ) se compose d'une inductance propre et de la force électromotrice de mutuelle, cette phase étant alimenté par la tension  $v_{s1}$  :



La loi des mailles s'écrit alors pour les grandeurs complexes :

$$\underline{V}_{s1} = j L_s \Omega \underline{I}_{s1} - \underline{E}_{s1},$$

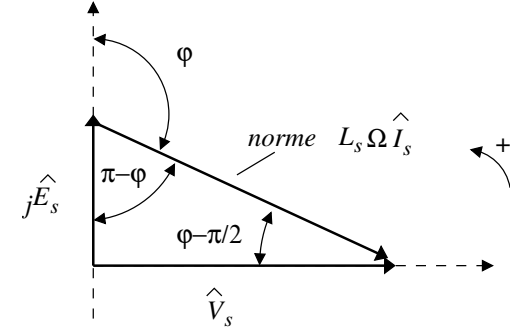
Les amplitudes complexes s'obtiennent à partir des grandeurs réelles :

$$\begin{aligned} -v_{s1}(t) &= \hat{V}_s \cos(\Omega t) \Rightarrow \underline{V}_{s1} = \hat{V}_s; \\ -i_{s1}(t) &= \hat{I}_s \cos(\Omega t - \varphi) \Rightarrow \underline{I}_{s1} = \hat{I}_s e^{-j\varphi}; \\ -e_{s1}(t) &= \hat{E}_s \cos(\Omega t - \pi/2) \Rightarrow \underline{E}_{s1} = \hat{E}_s e^{-j\pi/2} = -j\hat{E}_s. \end{aligned}$$

La loi des mailles peut donc se réécrire :

$$\hat{V}_s = j L_s \Omega \hat{I}_s e^{-j\varphi} + j \hat{E}_s = L_s \Omega \hat{I}_s e^{j(\pi/2 - \varphi)} + \hat{E}_s e^{j\pi/2}$$

Ce qui donne pour la représentation de Fresnel :



Refermer le triangle (loi des mailles et relation de Chasles) impose de choisir un angle  $\pi/2 < \varphi < \pi$ .

- (c) Dans le triangle rectangle, le théorème de Pythagore impose :

$$\boxed{L_s \Omega \hat{I}_s = \sqrt{\hat{E}_s^2 + \hat{V}_s^2}}$$

$$\text{D'autre part, } \tan(\varphi - \pi/2) = \frac{\hat{E}_s}{\hat{V}_s} \Leftrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\hat{E}_s}{\hat{V}_s}\right)}$$

5. L'équipage mobile en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  et soumis à un couple  $C$  reçoit une puissance mécanique :

$$P_m = C \Omega = -\hat{C} \Omega \sin(\varphi) \Rightarrow \boxed{P_m = -\hat{M} I_r \hat{I}_s \Omega \sin(\varphi)}$$

D'après les expressions de la fem et de l'intensité dans la phase  $B_1$  du stator, le déphasage absolu entre ces deux grandeurs est  $\varphi - \pi/2$ ; en régime sinusoïdal, la force électromotrice fournit donc une puissance moyenne :

$$P_{fem1} = \frac{\hat{E}_s \hat{I}_s}{2} \cos(\pi/2 - \varphi) = \frac{\hat{M} I_r \Omega \hat{I}_s}{2} \sin(\varphi)$$

Il ne faut pas oublier de tenir compte de la seconde phase du stator, pour une puissance totale fournie :

$$P_{fem} = 2P_{fem1} \Rightarrow \boxed{P_{fem} = \hat{M} I_r \Omega \hat{I}_s \sin(\varphi)}$$

On constate que les deux puissances sont opposées, ce qui caractérise un couplage électromagnétique parfait en accord avec le fait qu'on a négligé les différents types de perte.

6. Application numérique :

$$\hat{I}_s = \frac{\sqrt{\hat{E}_s^2 + \hat{V}_s^2}}{L_s \Omega} = \frac{\sqrt{(150\sqrt{2})^2 + (230\sqrt{2})^2}}{10} \Rightarrow \boxed{\hat{I}_s = 38,8 \text{ A}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{150\sqrt{2}}{230\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{\varphi = 123^\circ}$$

En l'absence de résistance, la puissance moyenne  $P$  fournie par le réseau diphasé est égale à la puissance moyenne reçue par les forces électromotrices et donc à l'opposé de la puissance fournie par les forces électromotrices :

$$P = -P_{fem} = -\hat{M}\Omega I_r \times \hat{I}_s \sin(\varphi) = -150\sqrt{2} \times 38,8 \times \sin(123)$$

$$\boxed{P = -6,9 \text{ kW}}$$

7. La machine fonctionne en **alternateur**. Un opérateur fournit un couple mécanique moteur qui entraîne le rotor, ce couple s'oppose au couple électromagnétique. La puissance du couple électromagnétique est négative, ce qui implique une puissance positive pour la puissance fournie par les fem des phases du stator, l'énergie électrique produite est fournie au réseau, comme l'indique le signe « - » de la puissance fournie par le réseau à la machine.

### CP079. Traction d'un véhicule électrique (\*\*\*)

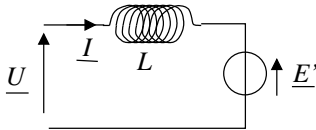
- Pour une machine synchrone, le rotor et le champ tournant statorique tournent à la même vitesse angulaire  $\boxed{\Omega = \omega}$ .
- En une durée  $T$ , le véhicule parcourt une distance  $x = vT$  le long de la pente et s'élève d'une hauteur  $z = x\alpha$  avec  $\alpha = 0,1$ . Le moteur doit fournir une puissance compensant les pertes mécaniques et permettant au véhicule de s'élever :

$$P_m = P_{pertes} + \frac{mgx\alpha}{T} = P_{pertes} + mgv\alpha = 3 \times 10^3 + 800 \times (50/3,6) \times 9,8 \times 0,1$$

$$\boxed{P_m = 13,9 \text{ kW}}$$

3. Étude électrique :

- (a) Schéma électrique : en fonctionnement moteur, la force contre électromotrice reçoit une puissance électrique qui sera transformée en une puissance mécanique :



- (b) Pour une machine idéale, la puissance reçue par les forces contre électromotrices est égale à la puissance mécanique :

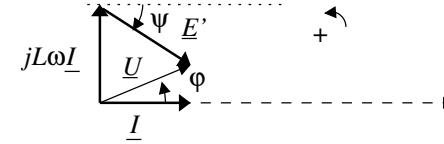
$$P_{em} = P_N = 15 \text{ kW}$$

Dans chaque phase, la force contre électromotrice reçoit une puissance moyenne  $P = E'I \cos(\psi)$ . La puissance électromotrice est égale à la puissance reçue par l'ensemble des deux phases :

$$2E'I \cos(\psi) = P_{em} \quad I = \frac{P_{em}}{2E' \cos(\psi)} = \frac{15 \times 10^3}{2 \times 0,19 \times 6000 \times 2\pi/60 \times 1/2}$$

$$\boxed{I \approx 126 \text{ A}}$$

- (c) En prenant pour origine des phases l'intensité, on obtient pour le diagramme de Fresnel :



On a :  $U \cos(\varphi) = E' \cos(\psi)$  et  $U \sin(\varphi) = L\omega I - E' |\sin(\psi)|$ , ce qui donne :

$$U = \sqrt{(E' \cos(\psi))^2 + (L\omega I - E' |\sin(\psi)|)^2}$$

avec  $E' = 119 \text{ V}$  et  $L\omega I = 1,6 \times 10^{-3} \times \frac{2\pi \times 6000}{60} \times 126 \approx 127 \text{ V}$ , on en déduit :

$$\boxed{U = 64 \text{ V}}$$

- (d) La puissance utile vaut  $P_u = \Gamma_u \times \Omega$  pour une puissance fournie  $P_N$ , donc :

$$\rho = \frac{\Gamma_u \Omega}{P_N} = \frac{23 \times 2\pi \times 6000/60}{15000} \Rightarrow \boxed{\rho = 96\%}$$

### CP004. Moteur asynchrone (\*\*\*)

1. En considérant le champ magnétique homogène sur la spire :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\theta(t) - \varphi(t)) \Rightarrow \boxed{\Phi(t) = \Phi_0 \cos(\omega_r t + \theta_0)}$$

2. Pour la spire et en l'absence de générateur, l'équation électrique s'écrit :

$$0 = Ri - e = Ri + \frac{d}{dt}(\Phi(t) + Li) \Rightarrow 0 = Ri + L \frac{di}{dt} - \Phi_0 \omega_r \sin(\omega_r t + \theta_0)$$

Comme on cherche la solution du régime forcé, il est intéressant d'utiliser les notations complexes pour cette équation linéaire à coefficients réels (attention à transformer le sinus en cosinus :  $\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$ ) :

$$R\hat{i}(t) + jL\omega_r \hat{i}(t) = \Phi_0 \omega_r e^{j(\omega_r t + \theta_0 - \frac{\pi}{2})} \Rightarrow \hat{i}(t) = \frac{\Phi_0 \omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}} e^{j(\omega_r t + \theta_0 - \psi - \frac{\pi}{2})}$$

C'est à dire pour la grandeur réelle :

$$\boxed{\hat{i}(t) = \frac{\Phi_0 \omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}} \sin(\omega_r t + \theta_0 - \psi)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tan(\psi) = \frac{L\omega_r}{R}}$$

3. Le moment magnétique de la spire vaut  $\vec{M} = i(t)S\vec{n}$ , donc :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = i(t)S\vec{n} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{\Gamma} = i(t)SB \sin(\theta(t) - \varphi(t))\vec{u}_z$$

$$\vec{\Gamma} = i_0\Phi_0 \sin(\omega_r t + \theta_0) \sin(\omega_r t + \theta_0 - \psi)\vec{u}_z$$

On calcule la valeur moyenne en linéarisant l'expression :

$$\vec{\Gamma} = \frac{i_0\Phi_0}{2} [\cos(\psi) - \cos(2\omega_r t + 2\theta_0 - \psi)]\vec{u}_z$$

En moyenne sur une période, seul le premier terme est non nul :

$$\vec{\Gamma}_m = \frac{i_0\Phi_0}{2} \cos(\psi) \vec{u}_z$$

Sachant que  $\cos(\psi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_r^2}}$  et en utilisant l'expression de  $i_0$ , on en déduit :

$$\vec{\Gamma}_m = \frac{\Phi_0\omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_r^2}} \frac{\Phi_0}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_r^2}} \Rightarrow \vec{\Gamma}_m = \frac{\Phi_0^2 R (\omega_0 - \omega)}{2 [R^2 + L^2 (\omega_0 - \omega)^2]} \vec{u}_z$$

4.  $\forall \omega \in [0, \omega_0]$ ,  $\Gamma_m \geq 0$ , le dispositif est **moteur**.

On constate que  $\Gamma_m(\omega = \omega_0) = 0$  et  $\Gamma_m(\omega = 0) = \Phi_0^2 R \omega_0 / [2(R^2 + L^2 \omega_0^2)]$ .

En divisant les deux membres de la fraction par  $R(\omega_0 - \omega)$ , le couple peut s'écrire :

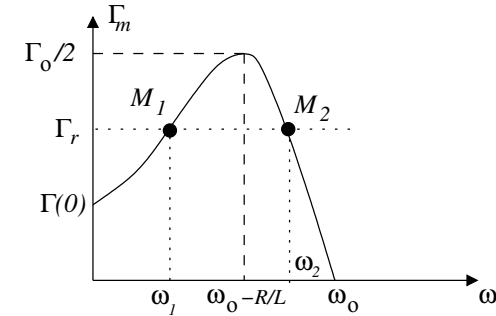
$$\omega \neq \omega_0 \quad \Gamma_m = \frac{\Gamma_0}{\frac{R}{L(\omega_0 - \omega)} + \frac{L(\omega_0 - \omega)}{R}}$$

Cette fonction est de la forme :  $x \rightarrow \frac{1}{x + 1/x}$ , elle est maximale lorsque le dénominateur est minimal, ce qui revient à chercher :

$$(x + 1/x)' = 1 - 1/x^2 = 0 \quad \text{donc} \quad x^2 = 1 \quad \text{avec} \quad x > 0$$

Le couple est maximal pour  $\omega = \omega_0 - R/L$  et vaut alors  $\Gamma_m^{max} = \Gamma_0/2$ .

Ce qui donne pour l'allure de la courbe :



5. Présence d'un couple résistant :

- (a) Le couple résistant doit être inférieur au couple maximal :  $\Gamma_r < \Gamma_0/2$ .  
En régime permanent, le couple moteur doit compenser le couple résistant. Pour  $0 < \Gamma_r < \Gamma_0/2$ , on constate qu'il existe en général deux points  $M_1$  et  $M_2$  de fonctionnement.
- (b) Le point  $M_1$  est instable. En effet si, pour une cause quelconque, la spire ralentit ( $\omega < \omega_1$ ), le couple moteur diminue, ce qui accentue le ralentissement de la spire jusqu'à l'arrêt complet.  
Le point  $M_2$  est stable. Si, pour une cause quelconque, la spire ralentit ( $\omega < \omega_2$ ), le couple moteur augmente, ce qui permet à la spire d'accélérer pour retrouver sa vitesse de rotation  $\omega_2$ .