

TD09 : électromagnétisme, ARQS (correction)

EM071. Inductance propre d'une bobine torique (*)

1. On considère le flux du champ magnétique créé par le tore à travers les spires du tore. Pour une spire :

$$\Phi_{1s} = \iint \vec{B}_{int} \cdot d\vec{S} = \int_{r=a}^b \int_{z=0}^h \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Le flux à travers les N spires de la bobine torique :

$$\Phi_p = N\Phi_{1s} \Rightarrow \Phi_p = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \times I$$

L'inductance propre est définie par $\Phi_p = LI$, on en déduit :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

2. L'énergie magnétique volumique, à l'intérieur du tore, a pour expression :

$$\omega_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{4\pi^2 r^2} \Rightarrow \omega_B = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

On intègre alors sur la totalité de la bobine torique pour obtenir l'énergie magnétique contenue dans le tore :

$$\mathcal{E}_B = \int_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2} dr \times r d\theta \times dz = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pour cet unique circuit d'inductance L , l'énergie magnétique s'identifie à $\mathcal{E}_B = \frac{1}{2} LI^2$; en comparant les deux expressions, on en déduit comme par la première méthode :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

EM057. Inductance mutuelle (*)

L'inductance mutuelle est définie par : $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$. Il s'agit donc de déterminer le flux du champ magnétique créé par le fil infini à travers la spire rectangulaire.

Avec les orientations indiquées, et en notant y la distance à l'axe, le fil infini crée, en un point $M(x, y, 0)$, un champ magnétique $\vec{B}_1 = \frac{-\mu_0 i_1}{2\pi y} \vec{u}_z$.

Il reste à évaluer le flux de ce champ à travers la spire rectangulaire en tenant compte que le vecteur surface de la spire rectangulaire est orienté selon $-\vec{u}_z$.

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \int_{y=a}^b \int_{x=0}^h \frac{\mu_0 i_1}{2\pi y} dx dy \Rightarrow \Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) i_1$$

Par identification, on obtient :

$$M = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

EM072. Détection par boucle inductive (**)

1. Pour le circuit de la boucle inductive, la loi des mailles s'écrit :

$$u = -e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M i_2) \quad \text{donc} \quad u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Pour le véhicule, l'équation s'écrit : $L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$

On combine alors les deux expressions en éliminant le courant i_2 :

$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \times -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} \quad \text{donc} \quad u = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) \frac{di_1}{dt}$$

En présence du véhicule, le dipôle AB est équivalent à une inductance :

$$L' = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)$$

2. Il s'agit de l'application de la loi de Lenz : les courants induits dans la carcasse du véhicule créent un champ magnétique qui tend à s'opposer au champ magnétique de la bobine L_1 . En conséquence, le champ magnétique au niveau de la bobine L_1 s'en trouve réduit, comme si l'inductance propre était plus faible.

3. Pour un circuit constitué d'une bobine d'inductance L_1 et d'un condensateur de capacité C , la pulsation d'oscillation propre vérifie : $\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C}$.

Pour estimer la variation relative de pulsation compte tenu de la variation relative d'inductance, on considère la différentielle logarithmique de l'expression :

$$2 \frac{d\omega_0}{\omega_0} = -\frac{dL_1}{L_1} \quad \text{donc} \quad \frac{d\omega_0}{\omega_0} = -\frac{dL_1}{2L_1} \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{M^2}{2L_1 L_2}$$

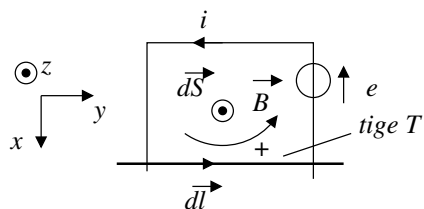
EM108. Chute d'une tige dans un champ magnétique permanent (*)

1. Dans le champ de pesanteur terrestre, la tige T est accélérée.

La tige se déplace dans un champ magnétique permanent, on est en présence d'une induction de Lorentz, un courant induit apparaît dans le circuit.

D'après la loi de Lenz, la force de Laplace qui s'exerce alors sur la tige tend à freiner cette tige.

2. Le circuit est orienté conformément à l'axe \vec{u}_z .



Expression de la f.e.m : $e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -B \times a \times \frac{dx(t)}{dt}$

Équation électrique : dans le cas d'un circuit fermé :

$$e = Ri \quad \text{donc} \quad i = -\frac{Ba}{R} \frac{dx(t)}{dt}$$

Force de Laplace :

$$\vec{f} = \int_T i d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_T idy\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z = iaB\vec{u}_x$$

L'intensité étant négative, la force de Laplace exerce bien une action dirigée vers le haut, opposé au mouvement de la tige.

Équation mécanique :

On applique la deuxième loi de Newton à la tige T soumise à son poids et à la force de Laplace, ce qui donne en projection sur l'axe vertical descendant :

$$m \frac{dv}{dt} = mg + iBa = mg - \frac{B^2 a^2}{R} v \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g}$$

avec $\boxed{\tau = \frac{mR}{B^2 a^2}}$.

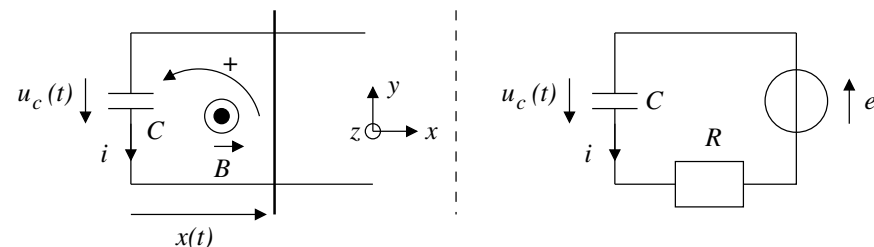
Compte-tenu de la condition initiale, la solution de cette équation est :

$$\boxed{v(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau})} \quad \text{avec} \quad \boxed{v_\infty = g\tau}$$

La tige est accélérée et tend vers une vitesse limite v_∞ .

EM136. Rampe de lancement (**)

1. On oriente le circuit conformément à l'axe Oz .



On applique le principe fondamental à la tige en projection le long de l'axe Ox pour lequel seule la force de Laplace est à considérer :

$$m \frac{dv}{dt} = iBa \quad (1)$$

L'équation électrique s'écrit simplement, en prenant garde à l'orientation du courant par rapport à la tension :

$$e + u_c(t) = Ri \quad (2) \quad \text{avec} \quad i = -C \frac{du_c}{dt} \quad (3)$$

Enfin, le vecteur surface et le champ magnétique étant orienté conforme, la loi de Faraday conduit à :

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -Ba \times \frac{dx}{dt} \Rightarrow e = -Bav(t) \quad (4)$$

En reportant (3) dans (1), on obtient :

$$m \frac{dv}{dt} + C Ba \frac{du_c}{dt} = 0$$

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur et de la vitesse, on en déduit :

$$mv(t) + C Ba u_c(t) = C Ba U_0$$

On repart alors de l'équation (1) :

$$m \frac{dv}{dt} = Ba \times \left(\frac{e + u_c(t)}{R} \right) = \frac{Ba}{R} \left(-Bav(t) + U_0 - \frac{m}{C Ba} v(t) \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{B^2 a^2}{Rm} \right) v(t) = \frac{Ba U_0}{mR}}$$

2. Évaluons le rapport des deux constantes de temps :

$$\frac{RC}{Rm/(B^2 a^2)} = \frac{B^2 a^2 C}{m} = \frac{B^2 a^2 C}{\rho \pi d^2 / 4 \times a} = \frac{4 B^2 a C}{\rho \pi d^2} = 2,9 \times 10^{-3} \ll 1$$

L'équation différentielle prend alors la forme simplifiée :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} \times v(t) = \frac{BaU_0}{mR}$$

Pour cette équation différentielle du premier ordre avec une vitesse initiale nulle, la vitesse maximale est celle du régime permanent :

$$v_{max} = \frac{BaU_0C}{m}$$

3. Le rendement η est le rapport de l'énergie utile, ici l'énergie cinétique acquise par la tige, sur l'énergie apportée, ici l'énergie électrostatique du condensateur :

$$\eta = \frac{mv_{max}^2/2}{CU_0^2/2} = \frac{mv_{max}^2}{CU_0^2} = \frac{mB^2a^2U_0^2C^2}{m^2CU_0^2} \Rightarrow \eta = \frac{B^2a^2C}{m}$$

Application numérique :

$$\eta = \frac{1,0^2 \times (5 \times 10^{-2})^2 \times 0,010}{8,9 \times 10^3 \times \pi \times (5,0 \times 10^{-3})^2 / 4 \times 5 \times 10^{-2}} \Rightarrow \eta = 2,9 \times 10^{-3}$$

EM075. Alternateur rudimentaire (**)

1. Commençons par évaluer le flux du champ magnétique à travers la bobine :

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = BSN \cos \theta = BSN \cos(\omega t)$$

On peut alors évaluer la f.e.m :

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad \text{donc} \quad e = BSN\omega \sin(\omega t)$$

2. Pour entretenir la rotation, le moment $\vec{\Gamma}_{op}$ doit compenser le moment des forces de Laplace $\vec{\Gamma}_{Lap}$. Évaluons ce moment de deux manières :

(a) Le moment des forces de Laplace peut être évalué en se rappelant que la puissance des forces de Laplace est opposée à la puissance de la force électromotrice :

$$P_{Lap} = \Gamma_{Lap} \times \omega = -P_{fem} = -ei = -\frac{e^2}{R} = -\frac{B^2S^2N^2\omega^2 \sin^2(\omega t)}{R}$$

On en déduit avec $\vec{\Gamma}_{op} = -\vec{\Gamma}_{Lap}$:

$$\vec{\Gamma}_{op} = \frac{B^2S^2N^2\omega \sin^2(\omega t)}{R} \vec{u}_z$$

(b) Pour une bobine d'aire S parcourue par un courant i et possédant N spires, le moment magnétique a pour expression : $\vec{\mathcal{M}} = NiS\vec{n}$ avec $i = e/R$.

Ce qui donne pour le couple des forces de Laplace :

$$\vec{\Gamma}_{Lap} = Nis\vec{n} \wedge \vec{B} = -NiSB \sin(\omega t) \vec{u}_z = -\frac{N^2S^2B^2\omega \sin^2(\omega t)}{R} \vec{u}_z$$

Avec $\vec{\Gamma}_{op} = -\vec{\Gamma}_{Lap}$, on obtient le résultat attendu.

EM077. Pince ampèremétrique (**)

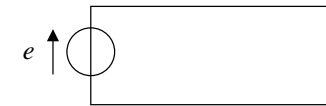
1. Le fil infini crée un champ magnétique : $\vec{B} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} \vec{u}_\theta$.

On détermine le flux du champ magnétique créé par le fil à travers les N spires de la bobine torique :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = N \int_{r=a}^b \int_{z=0}^h \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} dr dz = N \frac{\mu_0 i_2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Par définition $\Phi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2$, donc $M = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{L_1}{N}$.

2. On représente le circuit équivalent à la bobine torique dont on néglige la résistance :



La loi des mailles s'écrit : $e = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0$, c'est à dire en régime forcé :

$$j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = 0 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{M}{L_1} = \frac{1}{N}$$

3. Une pince ampèremétrique permet de mesurer des intensités très importantes de plusieurs dizaines voire centaines d'ampères parcourant un fil car le courant dans la bobine torique est beaucoup plus faible ($N \ll 1$).

De plus en refermant la bobine autour du fil on peut mesurer le courant dans le fil sans avoir besoin d'ouvrir le circuit électrique pour placer un ampèremètre.

EM110. Circuits résistifs couplés par mutuelle inductance (***)

Du fait du couplage magnétique, les équations électriques des circuits s'écrivent :

$$E = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (1) \quad \text{et} \quad 0 = Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

On est en présence d'un système de deux équations différentielles couplées. Afin de découpler ce système d'équations, on introduit le jeu de variables $X = i_1 + i_2$ et $Y = i_2 - i_1$; en considérant la somme et la différence des deux équations précédentes, on obtient (avec $M = kL$) :

$$E = RX + L(1+k)\frac{dX}{dt} \quad \text{et} \quad -E = RY + L(1-k)\frac{dY}{dt}$$

Ou tout aussi bien avec $\tau = L/R$:

$$\frac{E}{R} = X + \tau(1+k)\frac{dX}{dt} \quad \text{et} \quad -\frac{E}{R} = Y + \tau(1-k)\frac{dY}{dt}$$

On est donc ramené à deux équations différentielles indépendantes.

→ Premier cas, $0 \leq k < 1$:

Les solutions générales des équations différentielles sont :

$$X(t) = \frac{E}{R} + A \exp\left(\frac{-t}{\tau[1+k]}\right) \quad \text{et} \quad Y(t) = -\frac{E}{R} + B \exp\left(\frac{-t}{\tau[1-k]}\right)$$

On utilise alors la continuité des intensités électriques au sein des bobines, ce qui impose $X(0) = 0$ et $Y(0) = 0$, c'est à dire :

$$X(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau[1+k]}\right) \right] \quad \text{et} \quad Y(t) = \frac{E}{R} \left[\exp\left(\frac{-t}{\tau[1-k]}\right) - 1 \right]$$

Avec $i_1(t) = \frac{X(t) - Y(t)}{2}$ et $i_2(t) = \frac{X(t) + Y(t)}{2}$, on en déduit :

$$i_1(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\exp\left(\frac{-t}{\tau[1+k]}\right) + \exp\left(\frac{-t}{\tau[1-k]}\right) \right) \right]$$

$$i_2(t) = \frac{E}{2R} \left[-\exp\left(\frac{-t}{\tau[1+k]}\right) + \exp\left(\frac{-t}{\tau[1-k]}\right) \right]$$

→ Second cas, $k = 1$:

Les équations différentielles prennent la forme simplifiée :

$$\frac{E}{R} = X + 2\tau\frac{dX}{dt} \quad \text{et} \quad -\frac{E}{R} = Y$$

La seconde équation implique nécessairement que les intensités i_1 et i_2 ne peuvent pas être continues en $t = 0$, en effet $Y(0^-) = i_2(0^-) - i_1(0^-) = 0 \neq -E/R$.

La grandeur qui doit réellement être continue est l'énergie magnétique du système qui vaut dans le cas présent ($M = L$) :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li_1^2 + \frac{1}{2}Li_2^2 + Li_1i_2 = \frac{L}{2}(i_1 + i_2)^2 = \frac{L}{2}X^2$$

C'est donc la fonction $X : t \rightarrow X(t) = i_1(t) + i_2(t)$ qui est continue, c'est à dire $X(0^+) = X(0^-) = 0$; la résolution de l'équation différentielle conduit alors à :

$$X(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \right] \quad \text{et} \quad Y(t) = -E/R$$

On en déduit :

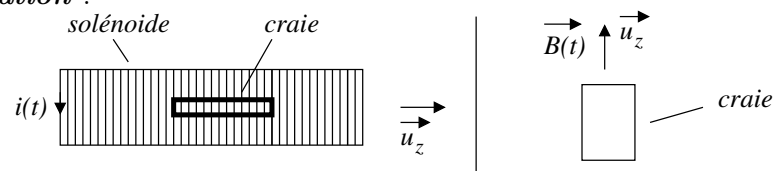
$$i_1(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \right] \quad \text{et} \quad i_2(t) = \frac{-E}{2R} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)$$

Sur les courbes, on observe que, pour un couplage faible $k \ll 1$, peu d'énergie passe dans le second circuit (l'intensité i_2 reste toujours faible vis à vis de l'intensité maximale du circuit primaire).

Avec k croissant, on observe l'augmentation du couplage, et des intensités qui varient plus brutalement à la fermeture du système. À la limite $k = 1$, les intensités sont discontinues à la fermeture de l'interrupteur.

EM140. Fusion par induction (***)

Modélisation :



Principales hypothèses et idées physiques :

- on considère un solénoïde de grande longueur vis à vis de son rayon ce qui permettra de supposer le solénoïde infini ;
- il faut $\vec{B}(t)$ pour créer, d'après la loi de Maxwell-Faraday, un champ électrique orthoradial qui va engendrer un vecteur courant électrique $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, avec σ la conductivité électrique du matériau ;
- la dissipation par effet Joule va contribuer à augmenter la température du matériau métallique ;
- un bilan thermique au sein de la « craie » permettra alors de déterminer la température du métal et de la comparer à la température de fusion ;
- on négligera l'effet de peau au sein de la craie en supposant que le champ magnétique pénètre uniformément au sein du métal. Pour rappel (cours sur les ondes), la profondeur caractéristique de pénétration vaut $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$. Ainsi pour des fréquences de l'ordre du kHz, δ est de l'ordre de quelques millimètres.

Mise en équation

- *Champ magnétique* : au sein du solénoïde infini avec n spires par unité de longueur $\vec{B}(t) = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$;
- *Champ électrique et vecteur courant dans la craie* : pour la source du champ

électrique, ici le champ magnétique variable, un plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution des sources, le champ électrique est donc orthoradial $\vec{E} = E_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta$.

Le dispositif est invariant par rotation d'angle θ ; de plus, en supposant, pour la craie, une longueur assez supérieure au rayon, on peut considérer une invariance selon z et finalement : $\vec{E} = E_\theta(r)\vec{u}_\theta$.

L'équation intégrée de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On choisit pour contour un cercle de rayon r centré sur l'origine et orienté conformément à \vec{u}_z :

$$E_\theta(r) \times 2\pi r = - \frac{d}{dt} (B(t) \times \pi r^2) \Rightarrow \vec{E} = - \frac{r}{2} \mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta$$

En faisant l'hypothèse d'un courant sinusoïdal $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$, on en déduit le vecteur densité de courant au sein du métal :

$$\vec{j} = \frac{\sigma}{2} r \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

— *Bilan thermique* : dans tous les cas, on se place en régime permanent. En effet, lors du régime transitoire, la température augmente jusqu'à atteindre celle du régime permanent. En conséquence si la craie ne fond pas en régime permanent, elle ne fondra pas dans le régime transitoire. Deux options se présentent alors :

- effectuer un bilan thermique **local** dans la craie sur une coquille cylindrique pour trouver le champ de température $T(r)$, puis vérifier si la température au centre est supérieure à la température de fusion,
- se contenter d'un bilan thermique **moyenné** sur l'ensemble de la craie et évaluer une température moyenne; cette solution est d'autant plus acceptable pour une craie de « petite » dimension latérale. On retient cette seconde option.

On modélise la craie par un cylindre de rayon L et de rayon a_0 à la température uniforme T_m ; en plus de l'apport en volume dû à l'effet Joule, on suppose un transfert conducto-convectif à la surface avec un flux surfacique sortant $\varphi_s = h(T_m - T_0)$ avec T_0 la température extérieure.

Le vecteur courant électrique crée une puissance volumique :

$$p_v = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{\sigma r^2 \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)}{4}$$

C'est à dire, en moyenne dans le temps :

$$\langle p_v \rangle = \frac{\sigma r^2 \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2}{8}$$

C'est à dire pour la puissance totale dissipée au sein de la craie :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &= \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a_0} \frac{\sigma r^2 \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2}{8} r d\theta dz dr \\ \Leftrightarrow \langle \mathcal{P} \rangle &= \frac{\sigma}{8} \times \frac{\mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 \times 2\pi L \times a_0^4}{4} = \frac{\pi \sigma \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 a_0^4 L}{16} \end{aligned}$$

On applique alors le premier principe de la thermodynamique à l'ensemble de la craie. En l'absence de dilatation, en régime permanent la puissance apportée en volume est équilibrée par le flux sortant :

$$0 = \langle \mathcal{P} \rangle - h(T_m - T_0) \times 2\pi a_0 L \Leftrightarrow T_m = T_0 + \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{2\pi a_0 L h}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_m = T_0 + \frac{\sigma \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 a_0^3}{32h}}$$

Application numérique et analyse :

Pour un échange avec l'air, on retient $h \approx 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. En considérant du cuivre, on retient $6 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ pour la conductivité électrique. Pour le couple {fréquence, rayon}, on peut proposer $f = 10 \text{ kHz}$ et $a_0 = 5,0 \text{ mm}$, l'effet de peau n'étant alors pas trop sensible. Pour l'intensité, il semble délicat de faire circuler plus que quelques ampères dans les fis, prenons $I_0 = 2,5 \text{ A}$. Enfin considérons $n = 1000$ spires par mètre, on obtient alors :

$$T_m = 20 + \frac{6 \times 10^7 \times (4\pi \times 10^{-7})^2 \times (10^3)^2 \times (2,5)^2 \times (2\pi \times 10^4)^2 \times (5,0 \times 10^{-3})^3}{32 \times 10}$$

On obtient $T_m = 9,3 \times 10^2 \text{ }^\circ\text{C}$.

La température de fusion du cuivre est $T_f = 1085^\circ\text{C}$.

Les valeurs sont comparables, en augmentant légèrement n , on peut atteindre la température de fusion. Notons enfin que nous avons évalué une température moyenne et que la température au centre est sans doute plus importante.

EM141. Mesure du champ de pesanteur terrestre ()**

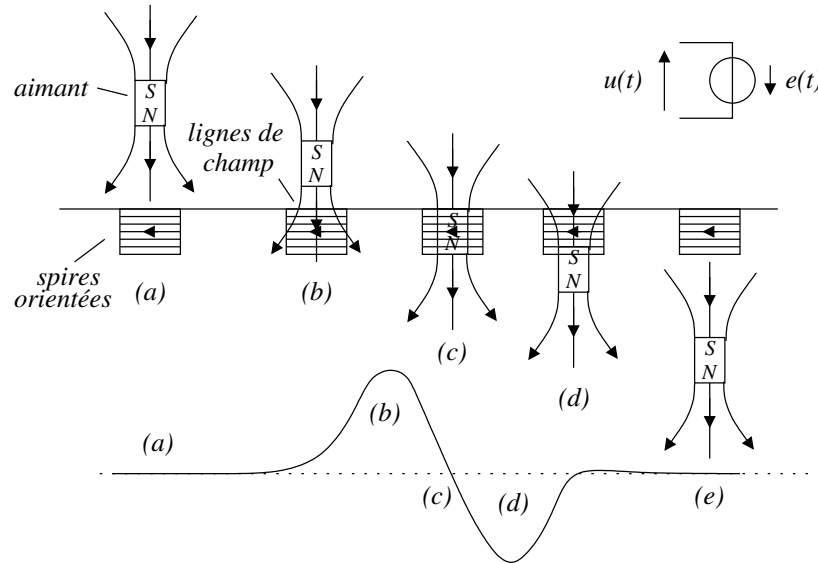
Forme de la courbe de tension :

D'après la loi de Faraday, la tension aux bornes d'une bobine s'exprime selon :

$$u(t) = -e(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

On peut alors distinguer plusieurs cas (cf. figure ci-après) :

- situations (a) et (e) : l'aimant est loin de la bobine, le flux magnétique à travers celle-ci est quasi-nul, il en est de même de la tension ;
- situation (b) : l'aimant s'approche de la bobine et entre dans la bobine, le flux magnétique à travers celle-ci augmente, une tension positive apparaît ;
- situation (c) : l'aimant et la bobine ayant une taille comparable, lorsque l'aimant est intégralement dans la bobine, le flux est stationnaire, et la tension s'annule. Cette phase pourrait être plus longue si la bobine était nettement plus longue que l'aimant ;
- situation (d) : l'aimant ressort de la bobine, le flux diminue et la tension est alors négative.



Le phénomène décrit se produit successivement à la traversée de chacune des bobines. L'aimant accélérant, les vagues sont de plus en plus rapprochées (la durée de chute entre les bobines se réduit) avec des pics plus prononcés (variation plus rapide du flux).

Exploitation des tracés :

Les bobines étant en circuit ouvert, elles ne sont pas parcourues par un courant et ne génèrent pas de champ magnétique qui viendrait contrer la chute de l'aimant (loi de Lenz). Les forces sur l'aimant se limitent donc *a priori* à son poids et à une force de frottement fluide.

Pour la force de frottement fluide, une évaluation rapide du nombre de Reynolds permet de proposer une force quadratique de norme $F_t \approx \mu_{air} v^2 S$ avec S la

section droite du cylindre et v la vitesse du mobile. L'aimant met environ 0,20 s pour parcourir la distance entre la première et la dernière bobine, soit une vitesse moyenne $v \approx 0,60/0,20 = 3$ m/s, donc :

$$F_t = 1,2 \times 3^2 \times \pi \times (2,5 \times 10^{-3})^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ N}$$

Tandis que pour le poids, en considérant une masse volumique typique d'un métal :

$$P \approx 5 \times 10^3 \times \pi \times (2,5 \times 10^{-3})^2 \times 4 \times 10^{-2} = 4 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Le poids étant significativement plus important que la traînée, on peut partir sur une **chute libre** en accord avec le second tracé qui propose une modélisation parabolique pour $z(t)$. Théoriquement, la loi est de la forme, avec z_0 et v_0 la position et la vitesse à l'instant $t = 0$ de la courbe de tension :

$$z(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0 \times t + z_0$$

Par identification avec la modélisation, on en déduit :

$$g = 4,689 \times 2 \Rightarrow \boxed{g \simeq 9,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Pour l'exploitation du premier tracé, on fait apparaître la vitesse du mobile dans la loi de Faraday $u(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dz} \times \frac{dz}{dt}$; on note que, pour une même disposition de l'aimant par rapport à la bobine, le pic de tension mesuré sera proportionnel à la vitesse de l'aimant à cet instant (variation plus rapide du flux), la constante ne dépendant que des aspects géométriques et des caractéristiques de l'aimant :

$$u_{max,i} = k \times v_i$$

La loi de la chute libre impose $v(t) = gt + v_0$ et donc $v_i = gt_i + v_0$ aux instants des pics, c'est à dire :

$$u_{max,i} = kgt_i + kv_0$$

On constate que la relation entre l'intensité des pics de tension et les instants associés est une relation affine en accord avec la première courbe de tendance, avec en particulier :

$$\frac{g}{v_0} = \frac{kg}{kv_0} = \frac{11,03}{3,008} = 3,67 \text{ s}^{-1}$$

Et finalement en utilisant l'expression de v_0 de la seconde courbe de tendance :

$$g = 3,67 \times 2,637 \Rightarrow \boxed{g \simeq 9,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Les valeurs obtenues, en particulier la seconde, sont cohérentes avec la valeur connue de $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.