

TD09 : électromagnétisme, ARQS

Calculs d'inductance

EM071. Inductance propre d'une bobine torique (*)

Une bobine torique, centrée autour d'un axe Oz , est constituée de N spires jointives enroulées sur un tore de section rectangulaire, de rayon intérieur a , de rayon extérieur b et de hauteur h . Les spires sont parcourues par un courant d'intensité I .

Dans l'hypothèse de spires jointives ($N \gg 1$), on rappelle que le champ magnétique vaut $\vec{B}_{int} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ au sein de la bobine et qu'il est nul en dehors $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$.

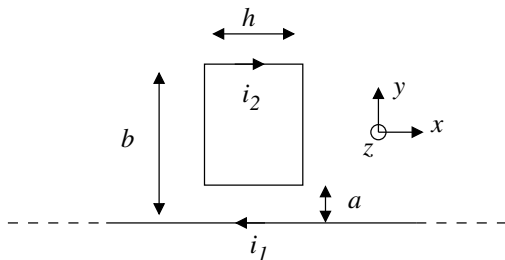
1. En considérant le flux propre, déterminer l'inductance propre de la bobine torique.
2. En considérant l'énergie magnétique, déterminer l'inductance propre de la bobine torique.

Réponse : $L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

EM057. Inductance mutuelle (*)

On considère le dispositif ci-dessous, comportant un fil infini et une spire rectangulaire.

Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle entre le fil infini et la spire rectangulaire.



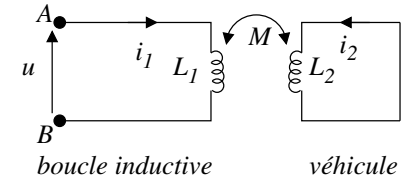
Réponse : $M = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

EM072. Détection par boucle inductive (**)

En milieu urbain, la détection de véhicules peut s'effectuer par boucle inductive. Le capteur est une boucle conductrice d'inductance propre L_1 implantée dans la chaussée. Lorsque le véhicule passe, des courants de Foucault sont induits dans la

carcasse métallique. Le véhicule est modélisé par un deuxième circuit d'inductance propre L_2 parcouru par un courant d'intensité i_2 .

On note M le coefficient d'inductance mutuelle. On néglige la résistance des circuits.



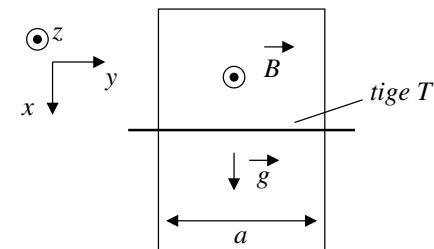
1. Montrer qu'en présence du véhicule, le dipôle AB est équivalent à une inductance propre L' que l'on exprimera en fonction de L_1 , L_2 et M .
2. On constate que $L' < L_1$. Quelle en est la raison physique ?
3. Cette boucle fait partie d'un circuit électronique oscillant dont la fréquence est fonction de son inductance. Ce circuit est composé d'une capacité C et du dipôle AB .
Quelle est la pulsation de résonance ? Calculer sa variation relative en fonction de la variation relative d'inductance.

Réponses : 1 : $L' = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)$; 3 : $\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{M^2}{2L_1 L_2}$

Couplage électromécanique

EM108. Chute d'une tige dans un champ magnétique permanent (*)

Une tige horizontale T de masse m et de résistance R tombe dans un champ de pesanteur uniforme \vec{g} en glissant sans frottement le long d'un cadre métallique vertical de résistance négligeable. Un aimant permanent crée un champ magnéto-statique \vec{B} que l'on suppose uniforme et normal au plan du circuit \mathcal{C} formé par le cadre et T .



1. Analyser qualitativement l'état électrique de \mathcal{C} et le mouvement de T .
2. T est lâchée sans vitesse initiale. En négligeant le champ propre de \mathcal{C} devant le champ extérieur, étudier le mouvement de T .

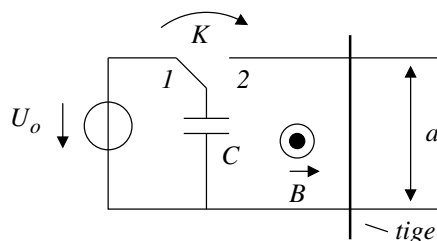
Exprimer en particulier en fonction de g , B , a , m et R la vitesse limite de ce mouvement et la constante de temps τ nécessaire à l'établissement de cette vitesse limite.

Réponses : 2 : $v(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau})$ avec $v_\infty = g\tau$

EM136. Rampe de lancement (**)

Aux instants $t < 0$, l'interrupteur K est en position (1), il bascule en position (2) à l'instant $t = 0$. Une tige peut se déplacer sans frottement sur les rails espacés d'une longueur $a = 5,0$ cm, plongée dans un champ magnétique \vec{B} uniforme de norme $B = 1,0$ T. On néglige l'auto-inductance propre du circuit. On appelle R la résistance du circuit.

On pourra supposer que la tige cylindrique a une longueur voisine de celle des rails, un diamètre $d = 5,0$ mm, et qu'elle est en cuivre ($8,9$ g · cm⁻³). Le condensateur a une capacité $C = 10$ mF.



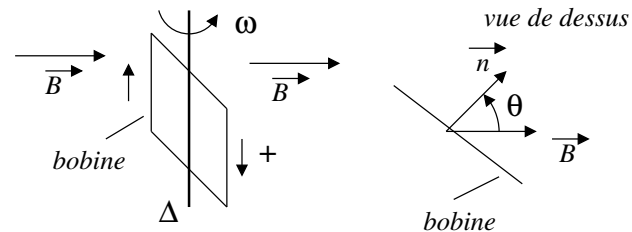
- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la tige.
- Déterminer la vitesse maximale de la tige. On pourra simplifier l'expression en montrant qu'un des deux temps caractéristiques du problème est très inférieur à l'autre.
- Définir et déterminer le rendement de cette rampe de lancement.

Réponses : 1 : $\frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{B^2 a^2}{Rm} \right) v(t) = \frac{BaU_0}{mR}$; 2 : $v_{max} \approx \frac{BaU_0 C}{m}$; 3 : $\eta = 2,9 \times 10^{-3}$

EM075. Alternateur rudimentaire (**)

Un alternateur transforme une énergie mécanique (ici la rotation de la bobine) en une énergie électrique (générée par la force électromotrice).

Une bobine plate comportant $N = 200$ spires, d'aire $S = 20$ cm², tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega = 10$ rad · s⁻¹ entre les pôles d'un aimant qui produit un champ uniforme $B = 0,2$ T normal à l'axe de rotation.



La bobine qui constitue un circuit fermé possède une résistance totale $R = 1$ Ω. Le champ magnétique qu'elle crée est négligeable devant le champ magnétique de l'aimant.

- Calculer la f.e.m induite par le mouvement de la bobine.
- Déterminer le moment Γ_{op} par rapport à l'axe que l'opérateur doit exercer pour entretenir la rotation :
 - Première méthode : en déterminant la puissance du couple des forces de Laplace grâce à la relation $P_{Lap} + P_{fem} = 0$.
 - Seconde méthode : en utilisant le fait qu'un champ magnétique exerce sur un moment magnétique \vec{M} un couple $\vec{\Gamma}_{Lap} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

Réponses : 1 : $e = BSN\omega \sin(\omega t)$; 2 : $\vec{\Gamma}_{op} = \frac{B^2 S^2 N^2 \omega \sin^2(\omega t)}{R} \vec{u}_z$

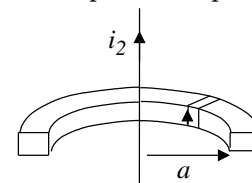
Pour aller plus loin

EM077. Pince ampèremétrique (**)

Une bobine torique est constituée de N spires jointives enroulées sur un tore, de section rectangulaire, de rayon intérieur a , de rayon extérieur b et de hauteur h . On suppose $N \gg 1$.

L'inductance propre de la bobine torique vaut : $L_1 = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ (exercice 1).

Le tore enlace un fil infini d'axe Oz parcouru par un courant sinusoïdal $i_2(t)$.



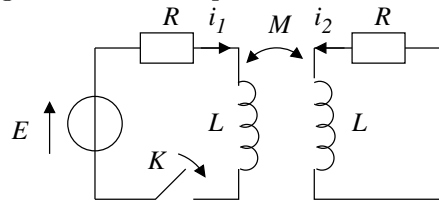
- Déterminer l'inductance mutuelle entre les deux circuits.
- On court-circuite le circuit torique et on néglige sa résistance interne. On se place en régime sinusoïdal forcé. Exprimer le rapport des amplitudes des intensités I_1 et I_2 .

3. Une pince ampèremétrique peut être utilisée pour mesurer le courant circulant dans une ligne à haute tension. Expliquer l'intérêt d'un tel dispositif.

Réponses : 1 : $M = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{L_1}{N}$; 2 : $\frac{I_1}{I_2} = \frac{M}{L_1} = \frac{1}{N}$

EM110. Circuits résistifs couplés par mutuelle inductance (***)

On considère le montage ci-contre. On pose $M = kL$ avec $0 \leq k \leq 1$.

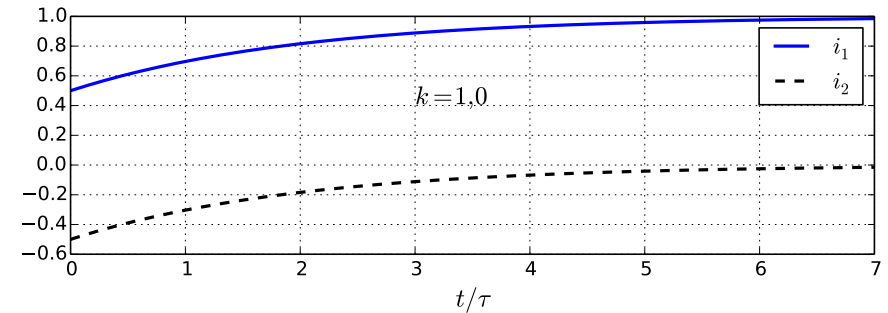
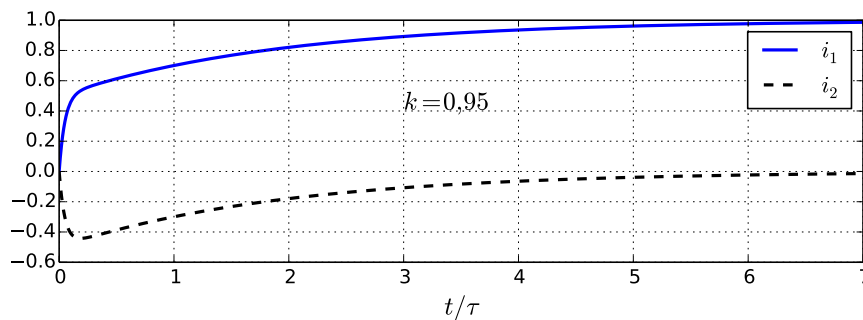
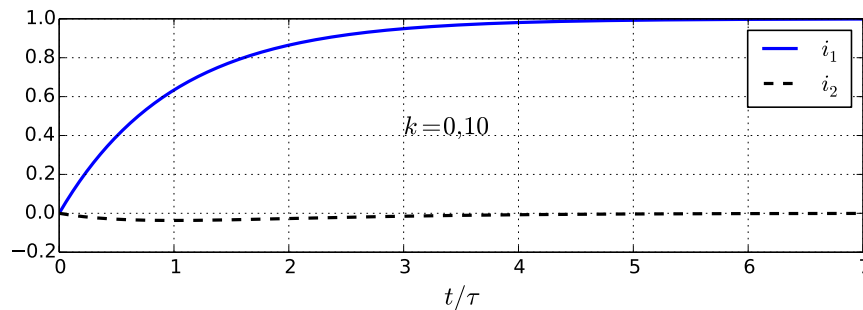


Pour $t < 0$ on a $i_1 = i_2 = 0$. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

Déterminer et tracer $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans les cas :

- premier cas : $0 \leq k < 1$;
- second cas : $k = 1$.

Les courbes suivantes représentent l'évolution des intensités au cours du temps (ramenées à l'intensité maximale) pour différentes valeurs de k . Commenter.



Réponses :

$$0 < k < 1 : i_1(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\exp\left(\frac{-t}{\tau[1+k]}\right) + \exp\left(\frac{-t}{\tau[1-k]}\right) \right) \right] ;$$

$$i_2(t) = \frac{E}{2R} \left[-\exp\left(\frac{-t}{\tau[1+k]}\right) + \exp\left(\frac{-t}{\tau[1-k]}\right) \right] ;$$

$$k = 1 : i_1(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \right] \quad \text{et} \quad i_2(t) = \frac{-E}{2R} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right).$$

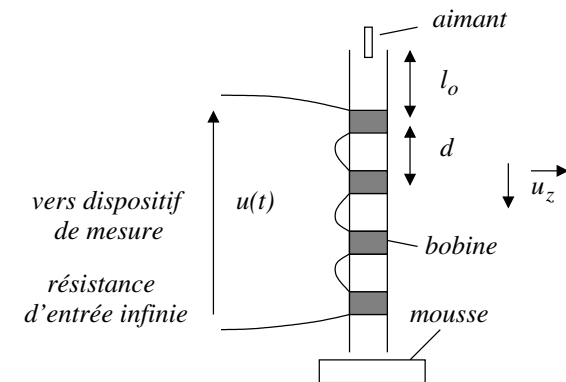
Résolutions de problème

EM140. Fusion par induction (***)

On considère une « craie métallique » placée au centre d'un solénoïde.

Question : déterminer les caractéristiques du courant dans le solénoïde permettant au métal de fondre.

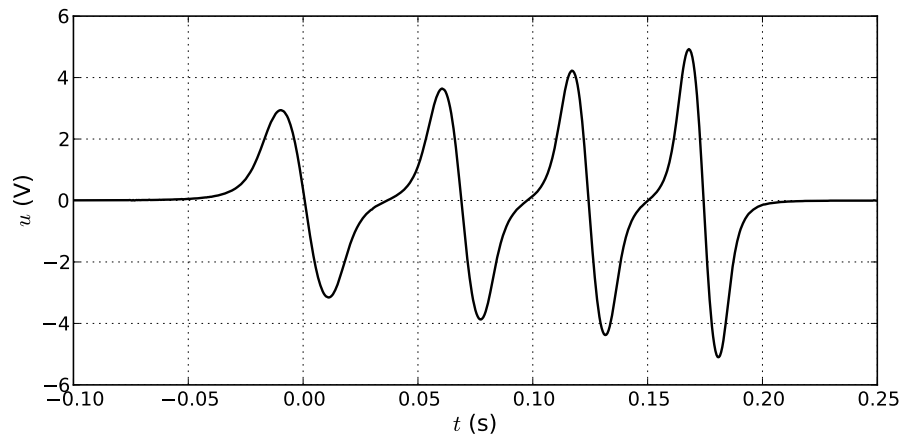
EM141. Mesure du champ de pesanteur terrestre (**)



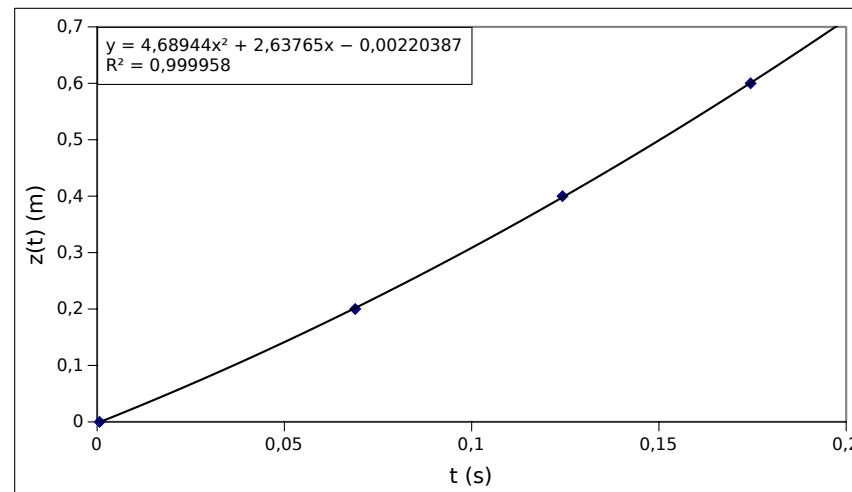
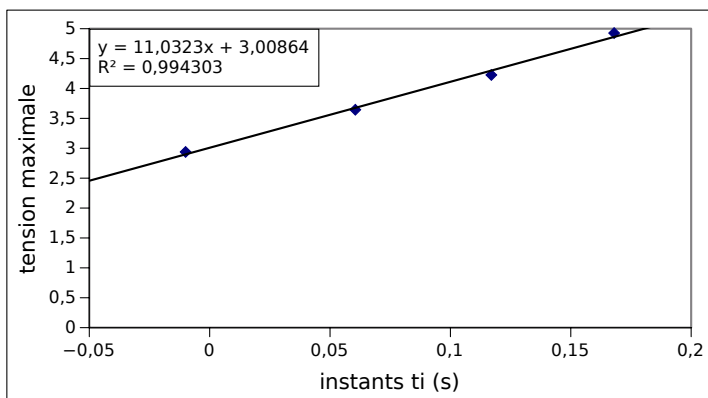
On considère un aimant métallique de forme cylindrique d'une longueur d'environ 4 cm et de diamètre 5 mm. Cet aimant est lâché du sommet d'un tuyau creux. Des bobines branchées comme indiquées sur le schéma sont réparties régulièrement le

long du dispositif ($d = 20$ cm), la longueur l_0 entre le point de lancer et la première bobine étant de l'ordre de 35 cm. Les bobines sont identiques et la longueur des bobines est de l'ordre de la longueur de l'aimant.

La chute de la bille est suivie par enregistrement de la tension aux bornes du dispositif, le déclenchement étant réalisé lors de l'apparition d'une tension non nulle au sein du dispositif. On obtient la courbe représentée ci-après.



De l'étude de cette courbe, on extrait les instants t_i pour lesquels la tension passe par des pics positifs u_{max}^i (première courbe de tendance) et les instants t_j pour lesquels la tension coupe l'axe horizontal avec une pente négative prononcée (seconde courbe de tendance).



Questions :

- expliquer l'allure de la courbe de tension ;
- extraire de deux manières, grâce aux courbes de tendance, l'intensité de pesanteur terrestre. Commentaire.