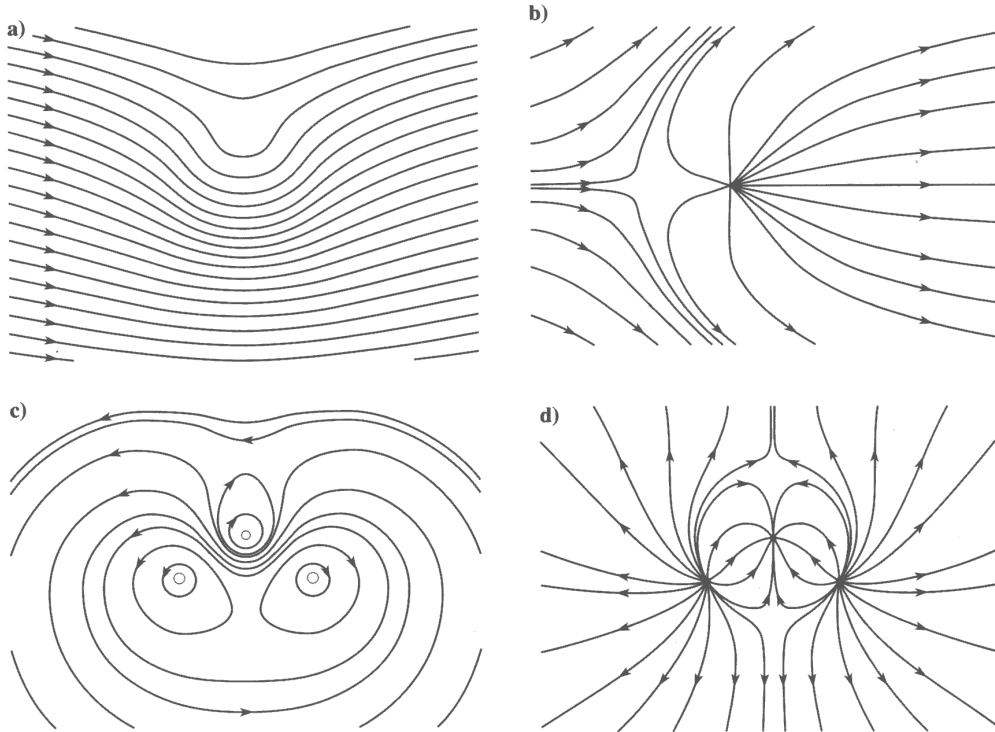


TD08 : magnétostatique

Cartes de champ

EM042. Cartes de champ magnétique (*)

Les 4 schémas ci-dessous représentent des lignes de champ ; on suppose que les champs sont invariants par translation perpendiculairement au plan du schéma. Parmi les 4 cartes proposées, deux ne peuvent pas correspondre à des cartes de champ magnétique. Lesquelles ?

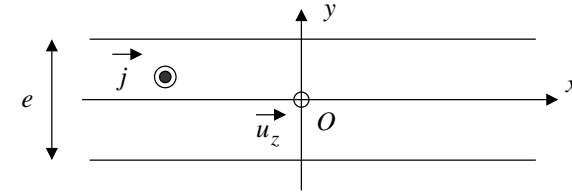


Réponse. Les cartes *b* et *d* ne représentent pas des lignes de champ magnétique.

Calculs de champ magnétique, théorème d'Ampère

EM043. Champ magnétique créé par une nappe de courant (**)

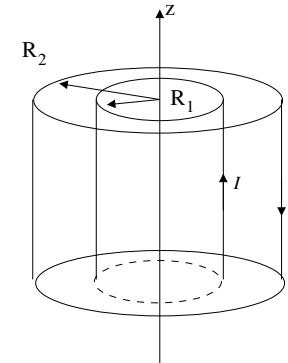
On considère une couche d'épaisseur e , infiniment étendue dans les directions \vec{u}_x et \vec{u}_z , et parcourue par une distribution de courant $\vec{j} = j\vec{u}_z$ uniforme. Le reste de l'espace est assimilé au vide.



1. Déterminer la forme du vecteur champ magnétique.
2. À l'aide du théorème d'Ampère, pour un point M quelconque de l'espace (dans ou hors de la nappe), déterminer l'expression du champ magnétique \vec{B} créé.
Attention le calcul de la circulation demande une vraie rigueur concernant les signes.
3. Tracer $y \rightarrow B_x(y)$, où B_x est la composante selon \vec{u}_x du champ magnétique.
4. On fait tendre l'épaisseur e vers 0 tout en maintenant inchangée la quantité de courant transportée. La distribution s'appelle alors une nappe de courant et on définit son courant surfacique par $\vec{j}_s = \vec{j} \times e$.
Montrer que le champ magnétique présente une discontinuité à la traversée du plan.

Réponses. 1 : $\vec{B} = B_x(y)\vec{u}_x$; 2 : $y > e/2$, $\vec{B} = -\mu_0 \frac{j e}{2} \vec{u}_x$; $0 < y < e/2$, $\vec{B} = -\mu_0 j y \vec{u}_x$; $B_x(y) = -B_x(-y)$; 3 : $\vec{B}(y=0^+) - \vec{B}(y=0^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_y$.

EM044. Champ magnétique créé par un câble coaxial (**)



Un câble coaxial est constitué de deux cylindres de même axe Oz , de rayon R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) parcourus en surface par une intensité I montante ou descendante.

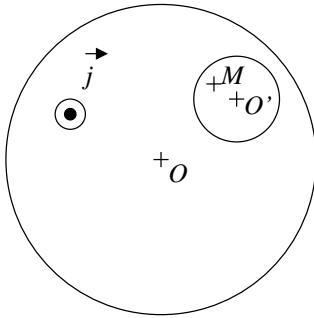
1. Donner par des arguments d'invariance et de symétrie la forme du champ magnétique.

- En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.
- Tracer la norme du champ magnétique en fonction de la distance à l'axe Oz .

Réponses. 1 : $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{u}_\theta$; 2 : $r < R_1$, $\vec{B} = \vec{0}$; $R_1 < r < R_2$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$; $r > R_2$, $\vec{B} = \vec{0}$.

EM067. Cavité cylindrique (**)

Un conducteur cylindrique de section circulaire est parcouru par un courant caractérisé par un vecteur densité de courant \vec{j} parallèle à l'axe du cylindre. Une cavité cylindrique d'axe parallèle à celui du conducteur est présente à l'intérieur du conducteur.



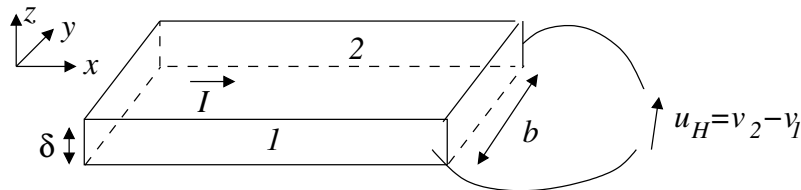
- Montrer que le champ magnétique en un point M de la cavité peut être déterminé grâce au principe de superposition.
- Exprimer $\vec{B}(M)$ en un point quelconque de la cavité.

Réponse. $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \overrightarrow{OO'}$.

Effets magnétiques

EM045. Effet Hall, géométrie cartésienne (**)

Considérons un ruban conducteur à section rectangulaire, de largeur b selon (Oy) , d'épaisseur δ selon (Oz) et parcouru par un courant d'intensité I compté positif dans la direction \vec{u}_x . Un champ magnétique dirigé selon Oz règne dans le conducteur.



- Exprimer \vec{j} le vecteur densité de courant à l'aide des données du problème.

- Montrer qualitativement que la présence du champ magnétique entraîne une déviation des électrons et l'apparition d'une tension entre les armatures 2 et 1.
- La tension entraîne l'apparition d'un champ électrique, nommé champ de Hall, \vec{E}_H . En considérant l'équation du mouvement pour un électron, montrer, une fois le **régime permanent** atteint, que le champ électrique vérifie l'équation :

$$\vec{E}_H = R_H \vec{j} \wedge \vec{B} \quad \text{avec} \quad R_H = \frac{1}{ne}$$

- En déduire l'expression de la tension u_H en fonction de B , I , n , δ et e , avec e la charge élémentaire et n la densité particulaire d'électrons.
- Application numérique pour l'argent : $n = 6,0 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$, $\delta = 0,10 \text{ mm}$, $B = 1,0 \text{ T}$ et $I = 5,0 \text{ A}$.
- Justifier que, dans les sondes à effet Hall, on utilise des matériaux semi-conducteurs pour lesquels le nombre d'électrons par unité de volume participant à la conduction est nettement plus faible que dans les conducteurs.

Réponses. 4 : $u_H = \frac{IB}{ne\delta}$; 5 : $u_H = 5,2 \mu\text{V}$

EM046. Supraconductivité, effet Meissner (**)

Certains matériaux, appelés supraconducteurs, voient leur conductivité devenir infinie en dessous d'une température critique T_c . Dans un tel matériau, le champ magnétique est « éjecté » de celui-ci.

Pour l'expliquer, on ajoute aux équations de Maxwell, la loi phénoménologique de London : $\text{rot} \vec{j} = -\frac{nq^2}{m} \vec{B}$, avec n le nombre d'électrons par unité de volume, $q = -e$ la charge de l'électron et m sa masse.

On rappelle que pour un champ de vecteurs \vec{A} : $\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

- Montrer qu'en régime stationnaire le champ magnétique dans le matériau vérifie l'équation : $\Delta \vec{B} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0}$

avec λ une longueur caractéristique que l'on exprimera en fonction des données du problème.

Calculer cette longueur dans le cas de l'étain : $n = 2,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

- On considère une lame d'épaisseur $2L$ dans la direction \vec{u}_y et d'extension infinie dans les autres directions. L'origine de l'axe Oy est prise au milieu de l'épaisseur.

On plonge la plaque dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{ext} = B_0 \vec{u}_z$

uniforme qui est donc la valeur du champ à l'extérieur.

Déterminer le champ magnétique \vec{B} dans le matériau que l'on cherchera sous la forme $\vec{B} = B(y)\vec{u}_z$. Justifier alors que le champ ne pénètre pas dans le matériau.

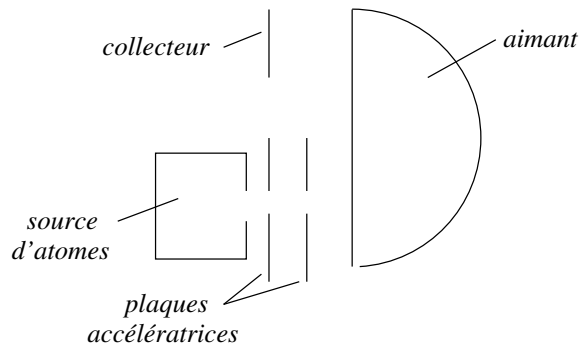
3. En déduire le vecteur courant \vec{j} dans le matériau.

Réponses. 1 : $\lambda = 34 \text{ nm}$; 2 : $\vec{B} = \frac{B_0 \times \text{ch}(y/\lambda)}{\text{ch}(L/\lambda)} \vec{u}_z$; 3 : $\vec{j} = \frac{B_0 \text{ sh}(y/\lambda)}{\mu_0 \lambda \text{ ch}(L/\lambda)} \vec{u}_x$.

Mouvements de particules

EM088. Spectromètre de masse (**)

On souhaite construire un spectromètre de masse permettant de déterminer le ratio carbone 12/carbone 14 d'un échantillon afin de déterminer son âge.



L'échantillon est tout d'abord vaporisé et le gaz est ionisé. On obtient des ions de charge $+e$.

Les ions sont accélérés par un accélérateur électrostatique, la différence de tension entre les deux plaques est de 1,0 kV.

Une fois la traversée de l'aimant effectuée, les ions sont récupérés au niveau du collecteur.

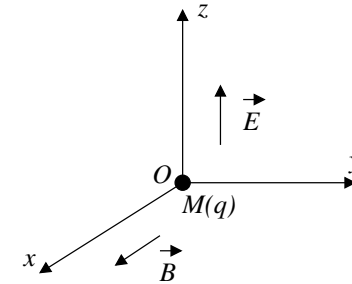
1. Quelle valeur faut-il donner au champ magnétique de l'aimant permettant au dispositif de pouvoir tenir sur une table ?
2. Sachant que les deux faisceaux doivent être séparés d'au moins quelques millimètres au niveau du collecteur, le dispositif est-il adapté pour séparer les atomes ^{12}C et ^{14}C ?
3. Est-il légitime de négliger la gravitation ? On déterminera la hauteur de chute lors du parcours sur le demi-cercle.

Réponses. 1 : $B = \frac{2\sqrt{2}}{d} \sqrt{\frac{mU}{e}} \approx 0,03 \text{ T}$; 3 : $|\Delta z| \approx 9 \times 10^{-10} \text{ m}$.

EM100 - Mouvement d'une particule chargée (***)

On considère une particule de masse m et de charge q positive soumise à un champ électrique et un champ magnétique, comme représentés sur le schéma ci-dessous. Les deux champs sont uniformes et indépendants du temps.

À l'instant initial, la particule se trouve à l'origine du système de coordonnées avec une vitesse nulle. On pose $\omega_c = qB/m$ et $v_0 = E/B$.



Déterminer la trajectoire de la particule, la représenter.

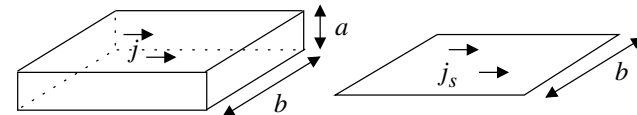
Réponses. $z(t) = \frac{v_0}{\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)]$; $y(t) = v_0 t - \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$; cycloïde.

Pour aller plus loin

EM068. Nappe surfacique (**)

On considère un plan infini xOy uniformément parcouru par des courants de densité surfacique $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_x$.

1. Préambule : notion de courants surfaciques.



Le modèle surfacique représente le cas limite d'une distribution volumique de vecteur courant \vec{j} et d'épaisseur a , telle que $a \rightarrow 0$ et $j_s = j \times a = cste$. Relier le vecteur courant surfacique \vec{j}_s à l'intensité I du courant.

2. Déterminer le champ magnétique créé en tout point de l'espace par la distribution surfacique infinie de l'énoncé.

Réponses. 1 : $I = j_s \times b$; 2 : $\forall z > 0 \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{j}_s}{2} \wedge \vec{u}_z$; $\forall z < 0 \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 \vec{j}_s}{2} \wedge \vec{u}_z$.

EM048. Effet Hall en géométrie cylindrique (***)

Résistance d'un conducteur cylindrique

Soit une couronne métallique cylindrique d'axe Oz , de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 et de hauteur $h \gg R_2 > R_1$. Le métal a une conductivité γ . On impose un potentiel V_1 sur le cylindre intérieur et V_2 sur le cylindre extérieur.

1. Montrer que le champ électrique au sein du matériau a pour expression :

$$\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{r} \frac{1}{\ln(R_2/R_1)} \vec{u}_r$$

2. En déduire l'expression du vecteur courant puis l'intensité I traversant le conducteur.
3. Déterminer la résistance R_0 de ce conducteur.

Réponses : 2 : $I = \frac{2\pi h \times \gamma(V_1 - V_2)}{\ln(R_2/R_1)}$; 3 : $R_0 = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi h \gamma}$.

Résistance en présence d'un champ magnétique

Par rapport à la situation précédente, on ajoute un champ magnétique. En présence du champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$, la loi d'Ohm locale devient :

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j} - R_H \vec{j} \wedge \vec{B} \quad \text{avec} \quad R_H = \frac{1}{nq}$$

avec n la densité particulaire des porteurs de charge et q la charge de ces porteurs.

1. Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, justifier que le champ électrique est toujours radial.
2. Projeter la nouvelle loi d'Ohm locale sur la base des coordonnées polaires et obtenir un système de deux équations.
3. Montrer alors que :

$$j_r = \frac{\gamma}{1 + R_H^2 B^2 \gamma^2} E_r$$

4. Déterminer l'expression de la résistance de la couronne cylindrique en présence d'un champ magnétique.
5. Pour le cuivre, $M = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\mu = 9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $\gamma = 6 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et il y a un électron libre par atome. On prend $B = 1,0 \text{ T}$. Calculer la variation relative de résistance en présence du champ magnétique. Conclure.
Faire de même pour l'Indium où $\gamma \approx 1 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et où R_H est 10^{10} fois plus élevé que pour Cu .

Réponses. 2 : $E_r = \frac{1}{\gamma} j_r - R_H j_\theta B$; $0 = E_\theta = \frac{1}{\gamma} j_\theta + R_H j_r B$; 4 : $R_B = R_0 \times (1 + R_H^2 \gamma^2 B^2)$;
5 : cuivre : $\frac{\Delta R}{R} \approx 2 \times 10^{-5}$, Indium : $\frac{\Delta R}{R} \approx 0,5$