

### TD07 : électrostatique (correction)

#### EM001. Potentiel dans le plan médiateur d'un doublet (\*)

- Le potentiel  $V$  est égal à la somme des potentiels créés par chacune des charges prises isolément, soit en un point  $M(y)$  de l'axe :

$$V(M) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + y^2}}$$

- L'axe  $(Oy)$  est un axe de symétrie de la distribution, en un point de cet axe, le champ  $\vec{E}$  est selon cet axe, soit  $\vec{E}(M) = E_y\vec{u}_y$ ; connaissant  $V(y)$ , on détermine alors  $E_y$  :

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{soit} \quad \vec{E}(M) = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{3/2}}\vec{u}_y$$

- La charge située en  $A$  crée un champ électrostatique en  $M$  :

$$\vec{E}_A(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)}\vec{u}_{AM}$$

Le champ résultant étant selon  $(Oy)$ , seule la composante selon  $(Oy)$  est à considérer :

$$E_{A,y}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)}\vec{u}_{AM} \cdot \vec{u}_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)} \times \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Le point  $B$  étant symétrique de  $A$  par rapport à l'axe  $(Oy)$ , il crée un champ électrique ayant même composante selon  $Oy$ , au final :

$$\vec{E}(M) = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{3/2}}\vec{u}_y$$

#### EM002. Analyse d'une carte de champ (\*\*)

- Les charges 1, 2, 4, 5 sont positives** car les lignes de champ sont sortantes; pour la raison opposée, **la charge 3 est négative**.
- On constate que la droite  $(AB)$  est un axe de symétrie de la distribution du champ, la distribution de charges doit donc avoir la même symétrie, en conséquence :

$$q_1 = q_5 \quad \text{et} \quad q_2 = q_4$$

- On considère la surface de Gauss correspondant à la sphère passant par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , le théorème de Gauss conduit à :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_2 + q_3 + q_4}{\epsilon_0}$$

On note qu'aucune ligne de champ ne traverse cette sphère, le flux du champ électrique à travers cette surface est donc nul :

$$q_2 + q_3 + q_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_3 = -(q_2 + q_4) \quad \Rightarrow \quad q_3 = -2q_2$$

#### EM027. Champ et potentiel (\*)

Dans chacun des cas, le champ électrique est perpendiculaire aux équipotentielles et dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

Pour estimer la norme, on assimile la dérivée spatiale du potentiel au taux d'accroissement  $\|\vec{E}\| \approx \frac{\Delta V}{\Delta x}$ .

$$- \|\vec{E}\|_A \approx \frac{7,0}{7,9 \times 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{E}\|_A \approx 9 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1};$$

$$- \|\vec{E}\|_B \approx \frac{7,0}{2,0 \times 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{E}\|_B \approx 3,5 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1};$$

$$- \|\vec{E}\|_C \approx \frac{9,0}{4,1 \times 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{E}\|_C \approx 2,2 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

#### EM003. Sphère chargée en surface (\*\*)

- Soit  $M$  un point de l'espace, les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Au point  $M$ , le champ électrique  $\vec{E}$  est contenu dans ces plans et donc dans leur intersection, il est donc radial; de plus la distribution est invariante par toute rotation d'angles  $\theta$  et  $\varphi$ , la composante radiale du champ ne dépend que de la distance au centre :

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$$

- On choisit comme surface de Gauss, une sphère de rayon  $r$  centrée sur  $O$  :

$$\Phi_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r(r) \times 4\pi r^2$$

$$\star \text{ pour } r < R, Q_{int} = 0 \text{ donc } E_r(r) = 0$$

$$\star \text{ pour } r > R, Q_{int} = \sigma \times 4\pi R^2 \text{ donc } E_r(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

- On utilise l'expression valable en  $r < R$  (resp.  $r > R$ ) pour évaluer  $\vec{E}(R_-)$  ( $\vec{E}(R_+)$ ) :

$$\vec{E}(R_+) - \vec{E}(R_-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_r - \vec{0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_r$$

- Comme  $E_\varphi = 0$  et  $E_\theta = 0$ ,  $V(r, \theta, \varphi) = V(r)$

★ À l'intérieur de la sphère :

$$E_r(r) = -\frac{dV}{dr} = 0 \quad \text{donc} \quad V(r) = cste = V(O) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

Le champ au centre est évalué directement grâce à la formule

$V(O) = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$ , en effet tous les points de la sphère sont à la distance  $R$  du centre.

★ À l'extérieur de la sphère :

$$E_r(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}}$$

La constante d'intégration est choisie nulle car on considère que le potentiel tend vers 0 à l'infini pour une distribution d'extension finie.

On constate que pour  $r \rightarrow R_+$ ,  $V(R_+) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = V(R_-)$ , le potentiel est continu en  $R$  ce qui constitue une autre méthode pour déterminer le potentiel intérieur.

#### EM004. Champ créé par une couche uniformément chargée (\*\*)

1. Soit  $M$  un point de l'espace, les plans  $(M, \vec{u}_z, \vec{u}_x)$  et  $(M, \vec{u}_z, \vec{u}_y)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Au point  $M$ , le champ électrique  $\vec{E}$  est contenu dans ces plans et donc dans leur intersection, il est donc selon  $\vec{u}_z$ ; de plus la distribution est invariante par toute translation selon  $Ox$  et  $Oy$ , la composante du champ ne dépend donc que de  $z$  :

$$\boxed{\vec{E} = E_z(z)\vec{u}_z}$$

2.  $\Pi = (xOy)$  est un plan de symétrie de la distribution de charges :

$$\boxed{E_z(z) = -E_z(-z)}$$

3. On considère comme surface de Gauss un cylindre dont la surface supérieure se trouve en  $z$  et la surface inférieure en  $-z$ ; on applique le théorème de Gauss sur cette surface sachant que le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface latérale est nul (car  $\vec{E}$  est selon  $\vec{u}_z$  et le vecteur normal à la surface latérale du cylindre est  $\vec{u}_r$ ) :

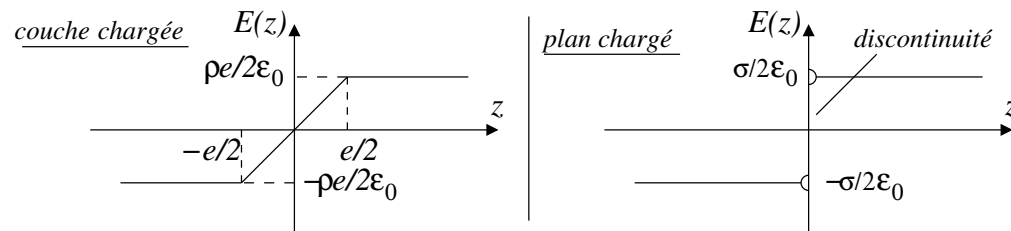
$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E_z(z)S$$

★ pour  $z > e/2$ ,  $Q_{int} = \rho \times Se$  donc  $\boxed{E_z(z) = \frac{\rho e}{2\epsilon_0}}$

★ pour  $0 < z < e/2$ ,  $Q_{int} = \rho \times S \times 2z$  donc  $\boxed{E_z(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0}}$

4. Allure de la fonction  $E_z(z)$  :

Pour les  $z < 0$ , on utilise le fait que  $E_z(z) = -E_z(-z)$  :



5. Dans ce cas de figure on applique les formules valables à l'extérieur de la distribution en posant  $\sigma = \rho \times e$  et on retrouve le cas limite du plan infini chargé en surface :

$$\boxed{z > 0 \quad \vec{E}' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{z < 0 \quad \vec{E}' = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z}$$

#### EM138. Distribution cylindrique non homogène (\*\*)

On considère un point  $M(r, \theta, z)$  de l'espace. Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges; au point  $M$ , le champ électrique est donc contenu dans l'intersection de ces deux plans, c'est à dire  $\vec{E} = E_r(r, \theta, z)\vec{u}_r$ .

L'invariance de la distribution de charges par translation selon l'axe  $Oz$  et par rotation d'angle  $\theta$  autour de  $Oz$  assure que la composante radiale ne dépend que de  $r$ , en conséquence  $\boxed{\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r}$ .

On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  centré sur l'axe  $Oz$  :

$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_{lat}} E_r(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r = E_r(r) \times 2\pi r h$$

La détermination de la charge intérieure nécessite de distinguer deux situations :

- à l'extérieur du cylindre  $r > R$  :

$$Q_{int} = \int_{r=0}^R \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r d\theta dz dr = 2\pi h \rho_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr$$

Le théorème de Gauss assure alors :

$$E_r(r) \times 2\pi r h = \frac{2\pi h \rho_0 R^2}{4\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\forall r > R, \vec{E}(r) = \frac{\rho_0 R^2}{4\epsilon_0 r} \vec{u}_r}$$

- à l'intérieur du cylindre  $r < R$  :

$$Q_{int} = \int_{\tilde{r}=0}^r \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho_0 \left(1 - \frac{\tilde{r}^2}{R^2}\right) \tilde{r} d\theta dz d\tilde{r} = 2\pi h \rho_0 \int_0^r \left(\tilde{r} - \frac{\tilde{r}^3}{R^2}\right) d\tilde{r}$$

Le théorème de Gauss assure alors :

$$E_r(r) \times 2\pi r h = \frac{2\pi h \rho_0}{\varepsilon_0} \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) \Rightarrow \boxed{\forall r < R, \vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{r^2}{2R^2}\right] \vec{u}_r}$$

Notons que pour cette distribution volumique de charges, le champ électrostatique est bien continu en  $r = R$  :  $\vec{E}(R) = \frac{\rho_0 R}{4\varepsilon_0} \vec{u}_r$ .

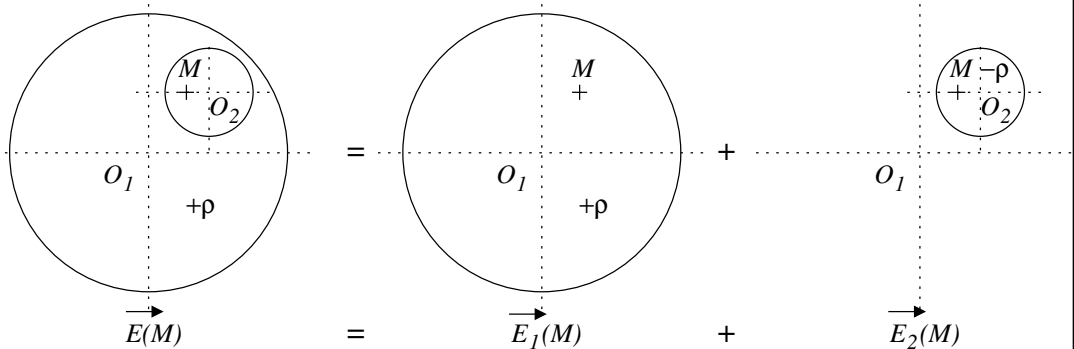
### EM005. Pentagone incomplet (\*)

1. La distribution complète posséderait l'axe  $(Ox)$  pour axe de symétrie, ainsi que tous les axes déduits de  $(Ox)$  par rotation d'angle  $2\pi/5$  autour de l'axe  $(Oz)$ . Le champ en  $O$  devrait être dirigé selon ces cinq axes, il serait donc nul.
2. La distribution proposée peut être vue comme la superposition du pentagone complet et d'une charge  $-q$  en  $(x = R, y = 0)$  pour compenser ; comme la distribution complète impose un champ nul au centre, le champ résultant au centre est donc uniquement celui créé par la charge  $-q$  :

$$\vec{E}_o = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} (-\vec{u}_x) \Rightarrow \boxed{\vec{E}_o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \vec{u}_x}$$

### EM115. Champ dans une cavité cylindrique (\*\*)

Le cylindre évidé peut être vu comme la superposition de deux cylindres l'un de charge volumique  $+\rho$ , l'autre de charge volumique  $-\rho$  comme indiqué sur le schéma :



On considère pour l'instant la configuration où seul le cylindre chargé  $+\rho$  est présent.

Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges, le champ électrique en  $M$  est contenu dans ces deux plans et donc dans leur intersection :  $\vec{E}_1(M) = E_1(r, \theta, z) \vec{u}_r$ .

La distribution étant invariante par rotation d'angle  $\theta$  et par translation selon  $Oz$ , on a :  $\vec{E}_1(M) = E_1(r) \vec{u}_r$ .

On applique alors le théorème de Gauss avec comme surface de Gauss un cylindre de rayon  $r < R_1$  et de hauteur  $h$  :

$$\oiint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1(r) \times 2\pi r \times h = \frac{\rho \times \pi r^2 \times h}{\varepsilon_0}$$

On en déduit :  $\vec{E}_1(M) = \frac{\rho r \vec{u}_r}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho \overrightarrow{O_1 M}}{2\varepsilon_0}$  pour un point  $M$  du plan  $(xO_1y)$ .

De la même manière,  $\vec{E}_2(M) = \frac{-\rho \overrightarrow{O_2 M}}{2\varepsilon_0}$

Et finalement  $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho \overrightarrow{O_1 O_2}}{2\varepsilon_0}}$ .

### EM024. Condensateur sphérique (\*\*)

— Première méthode : définition de la capacité.

On suppose  $V_1 > V_2$  et on appelle  $Q > 0$  la charge présente sur l'armature intérieure et  $M(r, \theta, \varphi)$  un point quelconque situé entre les deux armatures. Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges, le champ électrique en  $M$  est contenu dans ces deux plans et donc dans leur intersection :  $\vec{E}_1(M) = E_1(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$ .

La distribution étant invariante par rotation d'angle  $\theta$  et  $\varphi$  et on a :  $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$ .

On applique alors le théorème de Gauss pour une sphère de rayon  $r$  avec  $R_1 < r < R_2$  :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Pour ce problème à symétrie sphérique :  $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ , on en déduit :

$$-\frac{dV}{dr} \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow dV = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

Il reste à intégrer entre les deux armatures :

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]$$

Et du fait de la définition de la capacité :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 R_1}{R_2 - R_1}}$$

— Deuxième méthode : énergie stockée dans un condensateur.

Le champ électrique a pour expression  $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  au sein du condensateur et est nul en dehors (le vérifier en appliquant le théorème de Gauss pour  $r < R_1$  et  $r > R_2$ ). La densité volumique d'énergie électrostatique vaut  $\omega_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ , c'est à dire pour l'énergie électrostatique totale stockée dans le condensateur :

$$\mathcal{E} = \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} r d\theta dr \sin\theta d\varphi = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

Par ailleurs, on sait que l'énergie stockée dans un condensateur soumis à la tension  $U$  vaut :  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$  ; on retrouve par identification la formule précédente.

### EM117. Condensateur diédrique (\*\*)

1. Appliquons la relation proposée sur la plaque de potentiel  $V_1$  :

$$\theta = 0, \forall r \in [a, b], V(r, 0) = V_1 = f(r)g(0)$$

L'application  $f : r \rightarrow f(r)$  est donc une fonction constante et le potentiel ne dépend que de  $\theta$ .

L'espace entre les armatures correspond à une région vide de charges, l'équation de Poisson conduit à :  $\Delta V = 0$ . Compte tenu de l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta V(\theta) = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0$$

La solution est nécessairement de la forme  $V(\theta) = a\theta + b$ . Avec  $V(0) = V_1$  et  $V(\alpha) = V_2$ , on en déduit dans l'espace inter-armatures :

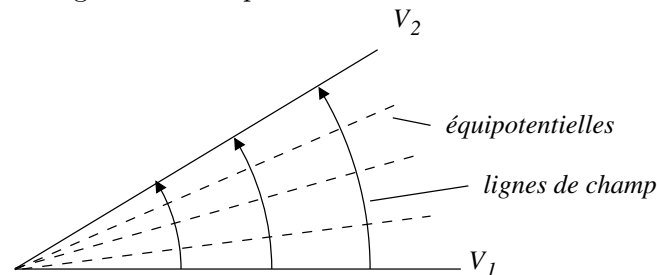
$$\boxed{V(\theta) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\alpha} \theta}$$

2. En électrostatique  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ , le potentiel ne dépendant que de  $\theta$  :

$$\vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{r\alpha} \vec{u}_\theta}$$

3. Les équipotentielles sont des plans d'équation  $\theta = cste$ , les lignes de champ sont des arcs de cercle centrés sur l'origine. La figure représente une coupe

des équipotentielles dans un plan  $z = cste$  et on suppose  $V_1 > V_2$  pour orienter les lignes de champ :



4. On applique la relation de passage au niveau de la plaque horizontale de vecteur normal  $\vec{u}_\theta$  :

$$\frac{V_1 - V_2}{r\alpha} \vec{u}_\theta - \vec{0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_\theta \Leftrightarrow \boxed{\sigma(r) = \frac{\epsilon_0(V_1 - V_2)}{r\alpha}}$$

5. On détermine alors la charge sur la plaque par sommation des charges élémentaires :

$$Q = \int_{r=a}^b \int_{z=0}^h \frac{\epsilon_0(V_1 - V_2)}{r\alpha} dr dz \Rightarrow Q = h \times \frac{\epsilon_0(V_1 - V_2)}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Et donc pour la capacité :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon_0 h}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

### EM036. Détection de gisements par gravimétrie (\*\*)

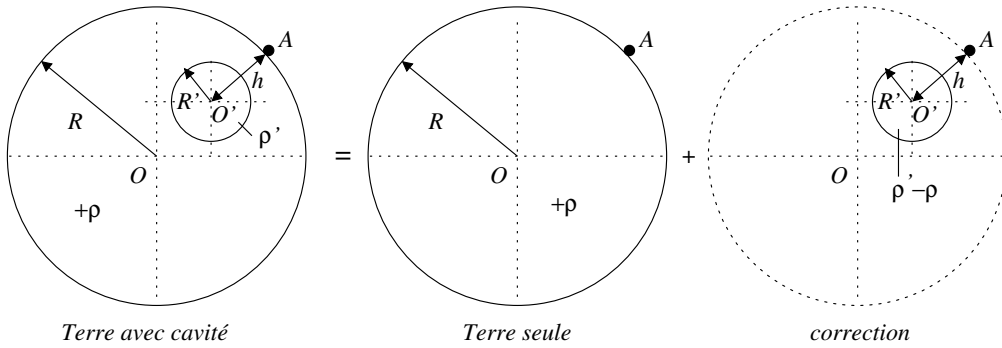
1. À l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, tout se passe comme si toute la masse était concentrée au centre :

$$\mathcal{G}_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{G \times \rho \times 4/3 \times \pi R^3}{R^2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{G}_0 = G\rho \times \frac{4}{3} \pi R}$$

2. La situation proposée peut être vue comme la superposition de la situation précédente (Terre seule) et d'une correction correspondant à une cavité de masse volumique  $\rho' - \rho$  (Cf. figure page suivante).

La correction du champ de gravitation correspond au champ créé par une boule de rayon  $R'$  de masse volumique  $\rho' - \rho$  dont le centre est situé à une distance  $h$  de  $A$  :

$$\delta\mathcal{G} = \frac{G(\rho' - \rho) \times 4/3 \times \pi R'^3}{h^2}$$



Et donc pour la variation relative :

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\mathcal{G}_0} = \frac{\rho' - \rho}{\rho} \times \frac{R'^3}{h^2 R}$$

On constate que la variation relative est nulle pour  $\rho = \rho'$ , cette variation relative est proportionnelle au volume de la cavité (terme en  $R'^3$ , effet de masse) et varie comme  $1/h^2$  du fait qu'en dehors de la cavité tout se passe comme si toute la correction de masse était située au centre de la cavité.

### EM011. Conduction d'un solide semi-conducteur (\*\*\*)

#### 1. Fil unique :

- (a) Calculons le flux du vecteur courant électrique à travers un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $\varepsilon$  :

$$\iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = j(r) \iint dS = j(r) 2\pi r \varepsilon$$

Ce flux du vecteur courant n'est rien d'autre que l'intensité  $i$  qui traverse le fil :

$$\vec{j} = \frac{i}{2\pi r \varepsilon} \vec{u}_r$$

- (b) De la loi d'Ohm locale, on déduit :

$$\vec{E} = \frac{i}{2\pi \varepsilon \gamma r} \vec{u}_r$$

- (c) On exprime alors le potentiel :

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{i}{2\pi \varepsilon \gamma r} \Rightarrow V(r) = -\frac{i}{2\pi \varepsilon \gamma} \ln(r) + cste$$

En considérant cette expression pour deux points  $M_1$  et  $M_2$ , on en déduit :

$$V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi \varepsilon \gamma} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

2. Si seul le contact en  $D$  était présent, on aurait (avec courant sortant) :

$$V(M_1) - V(M_2) = \frac{-i}{2\pi \varepsilon \gamma} \ln\left(\frac{r_2'}{r_1'}\right)$$

Les équations de Maxwell étant linéaires, on peut sommer les solutions pour obtenir le potentiel résultant :

$$V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi \varepsilon \gamma} \ln\left(\frac{r_2 \times r_1'}{r_1 \times r_2'}\right)$$

Pour deux points de la médiatrice,  $r_1 = r_1'$  et  $r_2 = r_2'$ ,  $V(M_1) = V(M_2)$ . Le plan médiateur définit une surface équipotentielle.

3. On choisit le point  $M_1$  à la limite de l'électrode  $A$  et  $M_2$  à la limite de l'électrode  $D$ , le long du segment  $[A, D]$ , on a :

$r_1 = a$ ,  $r_2 = \ell - a$ ,  $r_1' = \ell - a$ ,  $r_2' = a$ , on en déduit :

$$V(M_1) - V(M_2) = V(A) - V(D) = \frac{i}{2\pi \varepsilon \gamma} \ln\left(\frac{(\ell - a)^2}{a^2}\right) = \frac{2i}{2\pi \varepsilon \gamma} \ln\left(\frac{\ell}{a} - 1\right)$$

Pour  $\ell \gg a$ , on obtient :

$$\frac{V(A) - V(D)}{i} = \frac{1}{\pi \varepsilon \gamma} \ln\left(\frac{\ell}{a}\right) \Rightarrow R_0 = \frac{1}{\pi \varepsilon \gamma}$$

4. Application numérique :

$$R = \frac{1}{\pi \times 2,2 \times 10^4 \times 10^{-3}} \ln\left(\frac{20}{0,5}\right) \Rightarrow R \approx 53 \text{ m}\Omega$$

### EM143. Énergie électrostatique, énergie propre et énergie d'interaction (\*\*\*)

1. En appliquant le théorème de Gauss, on montre que la sphère de rayon  $R_1$  crée le champ électrostatique :

$$\forall r < R_1, \vec{E}_1(r) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \forall r > R_1, \vec{E}_1(r) = \frac{q_1}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

De même pour la sphère extérieure :

$$\forall r < R_2, \vec{E}_2(r) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \forall r > R_2, \vec{E}_2(r) = \frac{q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Et donc pour le champ électrostatique résultant dans tout l'espace :

- $\forall r < R_1, \vec{E}(r) = \vec{0}$ ;
- $\forall r \in ]R_1, R_2[, \vec{E}(r) = \frac{q_1}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ ;

$$- \forall r > R_2, \vec{E}(r) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

On détermine alors l'énergie électrostatique de la distribution en intégrant la densité volumique d'énergie électrostatique sur l'ensemble de l'espace :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \iiint_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv \\ &= \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 dr r d\theta r \sin(\theta) d\varphi \\ &+ \int_{r=R_2}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 dr r d\theta r \sin(\theta) d\varphi \\ &= \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_{r=R_2}^{\infty} \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{r=R_2}^{\infty} \frac{q_1^2 + q_2^2 + 2q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \int_{r=R_1}^{\infty} \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{r=R_2}^{\infty} \frac{q_2^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{r=R_2}^{\infty} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \end{aligned}$$

On en déduit : 
$$\mathcal{E} = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

2. D'après la dernière formule intégrale, le premier terme est l'énergie électrostatique de la sphère intérieure seule, le second terme est l'énergie électrostatique de la sphère extérieure seule. Le troisième terme est nécessairement le terme d'interaction.

En effet, la sphère intérieure crée en  $r = R_2$  le potentiel  $V_1(R_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$ , un élément de charge  $\delta q_2$  sur la seconde sphère est soumise à l'énergie potentielle d'interaction  $\delta \mathcal{E}_p = \delta q_2 \times V_1(R_2)$  et en sommant sur tous les éléments de la seconde sphère, on en déduit l'énergie potentielle de la seconde sphère dans le potentiel créé par la première sphère :

$$\mathcal{E}_p = \int \delta q_2 \times V_1(R_2) = q_2 V_1(R_2) \Rightarrow \mathcal{E}_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

### EM010. Phénomène d'écran dans un plasma (\*\*\*)

1.  $qV$  représente l'énergie potentielle de la particule de charge  $q$  placée dans un potentiel  $V$ , ces formules correspondent à la **loi de Boltzmann** vue pour l'atmosphère isotherme.

2. Par définition :  $\rho(r) = en_+(r) + (-e)n_-(r)$ , on en déduit :

$$\rho(r) = en_e \left[ \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \right] \Rightarrow \rho(r) = -2en_e \text{sh}\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$$

3. De l'équation de Poisson  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ , on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rV(r))}{dr^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} = \frac{2en_e}{\epsilon_0} \text{sh}\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$$

4. On effectue un développement à l'ordre 1 du sinus hyperbolique :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} \approx \frac{2en_e}{\epsilon_0} \left( \frac{eV(r)}{k_B T} \right)$$

équation que l'on peut réécrire :

$$\frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} - \frac{2e^2 n_e}{\epsilon_0 k_B T} \times rV(r) = 0$$

En introduisant  $\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 k_B T}{2e^2 n_e}$ , avec  $f(r) = rV(r)$ , on obtient finalement :

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{1}{\lambda_D^2} f(r) = 0$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$rV(r) = Ae^{-r/\lambda_D} + Be^{r/\lambda_D} \Rightarrow V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\lambda_D} + \frac{B}{r} e^{r/\lambda_D}$$

Le potentiel ne pouvant diverger à grande distance,  $B = 0$ . Au voisinage de l'origine, le potentiel a pour équivalent :

$$V(r) \sim_0 \frac{A}{r}$$

Au voisinage de l'origine, le potentiel doit être celui créé par l'ion positif  $Ar^+$ , c'est à dire :

$$V(r) \sim_0 \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

La comparaison des deux expressions conduit à :  $A = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$ .

En conclusion : 
$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}.$$

5. On constate que le potentiel décroît beaucoup plus rapidement que le potentiel créé par une charge ponctuelle seule au centre.

Dans le cas présent, l'ion au centre est entouré de charges négatives, ce qui atténue son effet. À une distance  $r \gg \lambda_D$ , les charges ne ressentent plus l'effet de l'ion central.

Application numérique :

$$\lambda_{D,1} = \sqrt{\frac{8,85 \times 10^{-12} \times 1,38 \times 10^{-23} \times 10^3}{2 \times (1,6 \times 10^{-19})^2 \times 3 \times 10^{21}}} \Rightarrow \underline{\lambda_{D,1} = 2,8 \times 10^{-8} \text{ m}}$$

De même  $\underline{\lambda_{D,2} = 8,9 \times 10^{-8} \text{ m}}$ .

6. Avec  $\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$ , on en déduit :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda_D} \right) \vec{u}_r}$$

On applique alors le théorème de Gauss sur une sphère de rayon  $r$  pour en déduire la charge contenue dans cette sphère :

$$Q(r) = \epsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E(r) \times 4\pi r^2 \Rightarrow \boxed{Q(r) = e \times e^{-r/\lambda_D} \left( 1 + \frac{r}{\lambda_D} \right)}$$

$\lim_{r \rightarrow 0} Q(r) = e$ , on retrouve l'ion argon au centre et sa charge  $+e$ .

$\lim_{r \rightarrow +\infty} Q(r) = 0$ , on retrouve la neutralité globale du plasma.