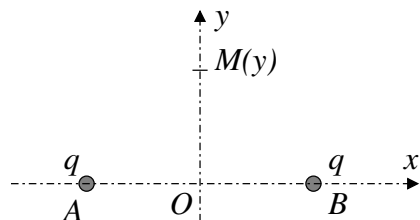


## TD07 : électrostatique

### Charges ponctuelles et cartes de champ

#### EM001. Potentiel dans le plan médiateur d'un doublet (\*)

Deux charges ponctuelles identiques égales à  $q$  sont placées en  $A$  et  $B$  sur l'axe  $(Ox)$  à une distance  $a$  de part et d'autre du point  $O$ . On note  $V(M)$  le potentiel électrostatique créé en un point  $M$  de l'axe  $(Oy)$  par ces deux charges.



1. Exprimer le potentiel  $V(M)$  en fonction de  $q$ ,  $a$  et  $y$ .
2. En déduire l'expression du champ électrostatique au point  $M$ .
3. Déterminer directement le champ électrostatique en utilisant l'expression du champ créé par une charge ponctuelle.

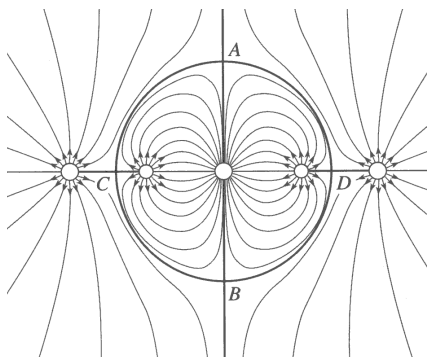
**Réponses.** 1 :  $V(M) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + y^2}}$  ; 2 :  $\vec{E}(M) = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{3/2}}\vec{u}_y$

#### EM002. Analyse d'une carte de champ (\*\*)

Le schéma représente les lignes de champ créées par cinq charges ponctuelles numérotées de 1 à 5 de la gauche vers la droite.

Le champ est nul aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

Les lignes en traits épais issues de ces points sont également des lieux de champ nul.

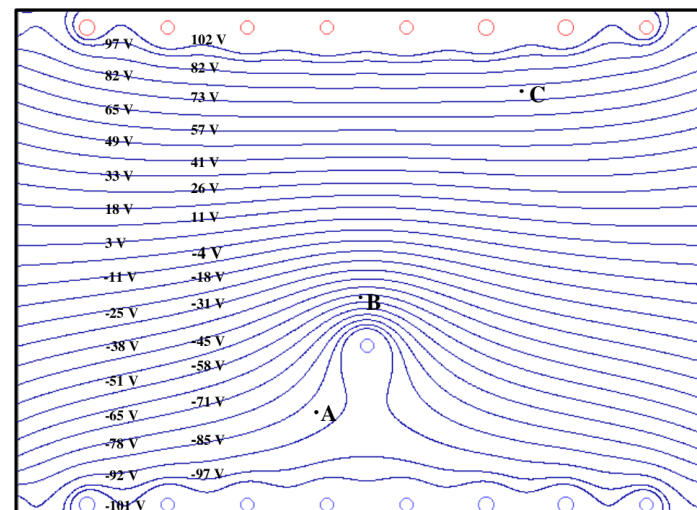


1. Déterminer les signes des cinq charges.

2. Analyser la symétrie du schéma. Quelles relations peut-on en déduire pour  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_4$  et  $q_5$  ?
3. À l'aide du théorème de Gauss, déterminer la relation liant  $q_2$  et  $q_3$ .

**Réponses.** 1 :  $q_3 < 0$ , autres charges positives ; 2 :  $q_1 = q_5$  et  $q_2 = q_4$  ; 3 :  $q_3 = -2q_2$

#### EM027. Champ et potentiel (\*)



Réseau d'équipotentiels  
Echelle :  $\text{---} = 1 \text{ cm}$

La figure représente les lignes équipotentiels d'un champ électrique créé par un ensemble de fils rectilignes, très longs et perpendiculaires au plan de la figure. Déterminer une valeur approchée du vecteur champ électrique aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**Réponses.**  $\|\vec{E}\|_A \simeq 9 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $\|\vec{E}\|_B \simeq 3,5 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $\|\vec{E}\|_C \simeq 2,2 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

### Théorème de Gauss

#### EM003. Sphère chargée en surface (\*\*)

Soit une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  portant une densité surfacique de charges  $\sigma$  uniforme.

1. Déterminer les symétries du champ  $\vec{E}$ .
2. En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace.
3. Vérifier la relation de passage à la traversée de la sphère, c'est à dire :

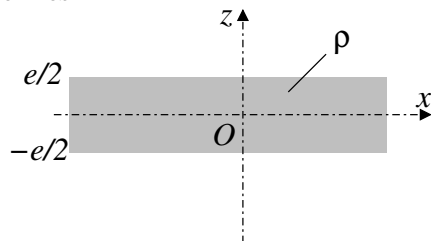
$$\vec{E}(R_+) - \vec{E}(R_-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_r$$

4. Donner l'expression du potentiel électrostatique  $V$  en tout point de l'espace. Montrer en particulier que  $V$  est constant à l'intérieur de la sphère.

**Réponses.** 2 : pour  $r < R$ ,  $\vec{E} = \vec{0}$ ; pour  $r > R$ ,  $\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ ; 4 : pour  $r \leq R$ ,  $V(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$  ;  
pour  $r \geq R$ ,  $V(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$

#### EM004. Champ créé par une couche uniformément chargée (\*\*)

Une couche plane infinie d'épaisseur  $e$  est délimitée par les plans  $z = -e/2$  et  $z = +e/2$ . Elle est chargée avec la densité volumique uniforme  $\rho$ . On note  $\vec{E}$  le champ électrostatique créé par la couche en tout point  $M$  de l'espace, repéré par ses coordonnées cartésiennes.



1. Montrer que le champ électrostatique est *a priori* de la forme  $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$ .
2. Que peut-on dire de  $E(z)$  et  $E(-z)$ ? Justifier.
3. En utilisant la surface de Gauss adéquate, exprimer  $E(z)$ . On distinguera les cas où le point  $M$  est à l'intérieur ou à l'extérieur de la couche plane.
4. Tracer l'allure de la fonction  $E(z)$ .
5. On fait tendre l'épaisseur de la couche plane vers  $e \rightarrow 0$  et la charge  $\rho \rightarrow \infty$ , de manière à se ramener au plan  $(xOy)$  portant la densité surfacique de charge  $\sigma = \rho e$ . Exprimer, en fonction de  $\sigma$ , le champ électrostatique  $\vec{E}'$  créé par ce plan et retrouver le résultat du cours.

**Réponses.** 2 :  $E(z) = -E(-z)$ ; 3 : pour  $z > e/2$ ,  $E(z) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0}$ ; pour  $0 < z < e/2$ ,  $E(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$  ;  
5 :  $z > 0$   $\vec{E}' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$ ;  $z < 0$   $\vec{E}' = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$

#### EM138. Distribution cylindrique non homogène (\*\*)

On considère un cylindre infini de rayon  $R$  centré sur l'axe  $Oz$ . À l'intérieur du cylindre, la densité volumique de charge vaut  $\rho(r) = \rho_0 \times (1 - r^2/R^2)$ , avec  $r$  la distance à l'axe. La densité volumique de charge est nulle à l'extérieur du cylindre.

Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace.

**Réponses.**  $\forall r < R$ ,  $\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) \vec{u}_r$ ;  $\forall r \geq R$ ,  $\vec{E} = \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0 r} \vec{u}_r$

#### EM028. Potentiel de Yukawa (\*\*)

On considère le potentiel électrique  $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/a_0}$  avec  $r = OM$  des coordonnées sphériques.

1. Exprimer le champ électrique associé au potentiel  $V$  en tout point de l'espace.
2. En déduire la charge électrique  $Q(R)$  contenue dans une sphère de rayon  $R$  centrée sur l'origine.
3. Déterminer  $Q(R)$  pour  $R \rightarrow 0$  et  $R \rightarrow +\infty$ .

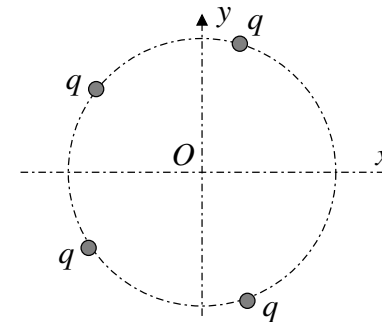
Montrer que la valeur de la charge au centre est compatible avec l'expression du potentiel électrostatique.

**Réponses.** 1 :  $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} e^{-r/a_0} \left[1 + \frac{r}{a_0}\right] \vec{u}_r$ ; 2 :  $Q(R) = q e^{-R/a_0} \left[1 + \frac{R}{a_0}\right]$  ;  
3 :  $\lim_{R \rightarrow 0} Q(R) = q$ , et  $\lim_{R \rightarrow +\infty} Q(R) = 0$

#### Théorème de superposition

#### EM005. Pentagone incomplet (\*)

Aux sommets d'un pentagone de centre  $O$  et de rayon  $R$ , contenu dans le plan  $(xOy)$ , sont placées des charges ponctuelles identiques égales à  $q$ , à l'exception du sommet situé sur l'axe  $(Ox)$  où il n'y a aucune charge. On note  $\vec{E}_o$  le champ créé par cette distribution au point  $O$ .

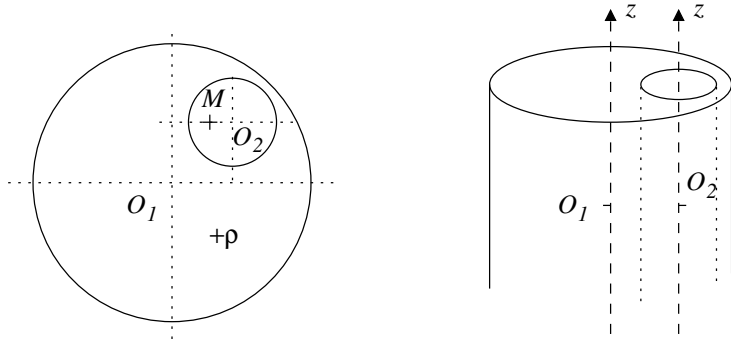


1. Quel serait le champ  $\vec{E}'_o$  créé en  $O$  si tous les sommets du pentagone étaient occupés par la même charge  $q$ ?
2. En considérant une superposition de deux distributions de charges équivalente à la distribution considérée, déterminer très simplement le champ  $\vec{E}_o$  en fonction de  $q$  et  $R$ .

**Réponses.** 1 :  $\vec{E}'_o = \vec{0}$ ; 2 :  $\vec{E}_o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \vec{u}_x$

### EM115. Champ dans une cavité cylindrique (\*\*)

On considère un cylindre de hauteur  $h$ , d'axe  $(O_1z)$  et de rayon  $R_1$ , uniformément chargé en volume (densité  $\rho$ ). On creuse à l'intérieur de celui-ci un cylindre d'axe  $(O_2z)$  et de rayon  $R_2$ . La distribution de charges constituée par le cylindre évidé a l'allure ci-après.



Déterminer le champ électrostatique régnant dans la cavité vide de charges.

**Indication** : on pourra considérer le cylindre évidé comme la superposition de deux cylindres l'un de charge volumique  $-\rho$ , l'autre de charge volumique  $+\rho$ , et appliquer deux fois le théorème de Gauss.

**Réponse.**  $\vec{E}(M) = \frac{\rho \vec{O_1O_2}}{2\epsilon_0}$

### Condensateurs

#### EM024. Condensateur sphérique (\*\*)

On considère deux sphères conductrices concentriques de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  placées au potentiel  $V_1$  et  $V_2$ . Entre les deux sphères le milieu est assimilé au vide.

Déterminer la capacité d'un tel condensateur par deux méthodes :

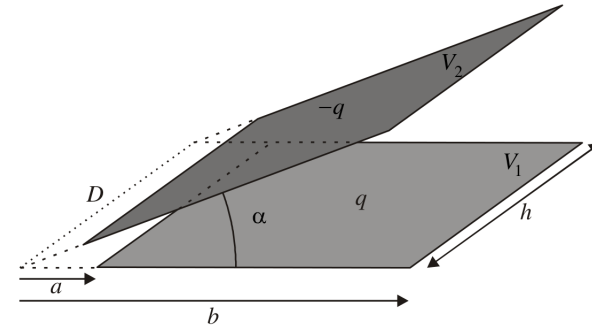
- en utilisant la définition de la capacité d'un condensateur ;
- en déterminant l'énergie stockée dans le condensateur.

**Réponse.**  $C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 R_1}{R_2 - R_1}$

#### EM117. Condensateur diédrique (\*\*)

Les deux armatures rectangulaires en regard se déduisent l'une de l'autre d'une rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'arête  $D$  du dièdre formé par les plans contenant les armatures. Elles sont comprises entre les cylindres de révolution autour de  $D$ , de rayons  $a$  et  $b > a$ . Leur largeur dans la direction parallèle à  $D$  vaut  $h$ . Les plaques sont respectivement aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ . On suppose  $h \gg (b - a)$ .

Un point  $M$  de l'espace entre les armatures est repéré en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .



1. On cherche des solutions du potentiel sous la forme  $V(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ .  
En utilisant une condition aux limites, justifier que le potentiel est en fait une simple fonction de  $\theta$  que l'on notera par la suite  $V(\theta)$ .

On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques.

$$\Delta V(r, \theta, z) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

En déduire la loi  $V(\theta)$ .

2. En déduire l'expression du champ électrostatique dans l'espace inter-armatures.
  3. Tracer l'allure des équipotentielles et des lignes de champ.
- On rappelle la relation de passage  $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ .
4. Sachant que le champ électrique est nul au sein des plaques métalliques, en déduire la charge surfacique  $\sigma$  en un point de l'armature horizontale.
  5. En déduire la capacité  $C$  de ce condensateur diédrique.

**Réponses.** 1 :  $V(\theta) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\alpha} \theta$ ; 2 :  $\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{r\alpha} \vec{u}_\theta$ ; 3 :  $\sigma(r) = \frac{\epsilon_0(V_1 - V_2)}{r\alpha}$ ;

4 :  $C = \frac{\epsilon_0 h}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

### Pour aller plus loin

#### EM036. Détection de gisements par gravimétrie (\*\*)

On modélise la Terre comme une sphère de rayon  $R$  et homogène avec une masse volumique  $\rho$ .

1. Exprimer le champ de gravitation  $\mathcal{G}_0$  à la surface de la Terre.

On considère un gisement correspondant à un défaut d'homogénéité de la Terre : dans une sphère de centre  $O'$  et de rayon  $R'$ , entièrement enfouie dans la Terre à une profondeur  $h > R'$ , la masse volumique est  $\rho' < \rho$ .

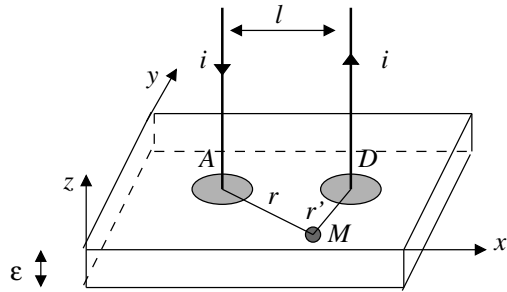
2. Quelle est alors la variation relative de la norme du champ de pesanteur au point  $A$  situé à la surface de la Terre, à la verticale de  $O'$ ? Commenter l'influence de  $R'$  et de  $h$ .

**Réponses.** 1 :  $\mathcal{G}_0 = G\rho \times \frac{4}{3}\pi R$ ; 2 :  $\frac{\delta\mathcal{G}}{\mathcal{G}_0} = \frac{\rho' - \rho}{\rho} \times \frac{R'^3}{h^2 R}$ .

### EM011. Conduction d'un solide semi-conducteur (\*\*\*)

L'ensemble de l'étude est menée en régime permanent. En l'absence de tout champ magnétique, le milieu est caractérisé par la loi d'Ohm locale  $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ .

Le courant  $i$  est amené en un point  $A$  du matériau par un fil, perpendiculairement à la plaque, confondu avec l'axe  $(Az)$ . Ce fil est relié au matériau par une électrode cylindrique de faible rayon. Ce courant électrique repart par un fil de même nature et fixé de la même manière au point  $D$ . L'ensemble est représenté sur la figure ci-après.



1. On considère tout d'abord une situation simplifiée, à symétrie cylindrique, dans laquelle on supprime le contact de départ en  $D$ .

Le courant arrivant en  $A$  se répartit donc dans l'ensemble du matériau avec la symétrie de révolution d'axe  $(Az)$  : la densité volumique de courant  $\vec{j}$  en un point  $M$  s'écrit  $\vec{j}(M) = j(r)\vec{u}_r$ , où  $r$  désigne la distance de  $M$  à l'axe  $(Az)$  et  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire radial de cet axe.

- (a) Exprimer  $j(r)$  en fonction de  $r$ ,  $\epsilon$  et  $i$ .  
 (b) En déduire l'expression du champ électrique dans le matériau.  
 (c) On considère deux points  $M_1$  et  $M_2$  de la plaque et on note  $r_1 = AM_1$  et  $r_2 = AM_2$ . Déterminer la différence de potentiel  $V(M_1) - V(M_2)$  en fonction de  $i$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$  et du quotient  $r_2/r_1$ .

2. On remet en place le contact de départ du courant en  $D$ . En procédant par superposition de deux situations analogues à celle de la première question, déterminer la nouvelle expression de  $V(M_1) - V(M_2)$  en fonction de  $i$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r'_1 = DM_1$  et  $r'_2 = DM_2$ .

Que vaut cette différence de potentiel si  $M_1$  et  $M_2$  sont sur la médiatrice du segment  $AD$ ?

3. On note  $l = AD$  et  $a$  le rayon des électrodes cylindriques de contact électrique en  $A$  et en  $D$ .

Ces électrodes sont formées d'un matériau métallique très bon conducteur électrique et sont donc considérées comme équipotentielles, de potentiels respectifs  $V_A$  et  $V_D$ .

Montrer que si  $l \gg a$ , la résistance électrique de la plaque s'écrit sous la forme  $R = R_0 \ln(l/a)$ , où l'on exprimera  $R_0$  en fonction de  $\gamma$  et  $\epsilon$ .

4. Application numérique.

L'épaisseur de la plaque de semi-conducteur est  $\epsilon = 1,0$  mm. On réalise le dispositif de la figure avec  $l = 2,0$  cm et  $a = 0,50$  mm. La conductivité du matériau (silicium dopé) est  $\gamma = 2,2 \times 10^4$  S · m<sup>-1</sup>.

Calculer  $R$ .

**Réponses.** 1(a) :  $\vec{j} = \frac{i}{2\pi r\epsilon}\vec{u}_r$ ; 1(b) :  $\vec{E} = \frac{i}{2\pi\epsilon\gamma r}\vec{u}_r$ ; 1(c) :  $V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi\epsilon\gamma} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ ;  
 2 :  $V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi\epsilon\gamma} \ln\left(\frac{r_2 \times r'_1}{r_1 \times r'_2}\right)$ ; 3 :  $R_0 = \frac{1}{\pi\epsilon\gamma}$ ; 4 :  $R \simeq 53$  mΩ

### EM010. Phénomène d'écran dans un plasma (\*\*\*)

Un plasma est un milieu électriquement neutre macroscopiquement, mais dont les atomes sont ionisés : il est donc constitué de cations et d'électrons. Il en existe des naturels (foudre, ionosphère-aurores polaires, étoiles...) et des artificiels (lampes fluorescentes, propulseurs de fusée...).

On considère un ion argon  $Ar^+$ , placé en  $O$  et pris comme origine. Du fait de l'attraction coulombienne, on observe un surplus de charges négatives au voisinage de cet ion. Soit  $V(r)$  le potentiel qui règne en un point à la distance  $r$  de  $O$ . On peut montrer que les densités particulières des charges positives et négatives sont respectivement :

$$n_+(r) = n_e \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_-(r) = n_e \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$$

où  $n_e$  est la densité particulière moyenne des électrons et cations,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température.

1. Justifier les expressions des densités particulières.  
 2. Donner l'expression de la densité volumique de charges totale  $\rho(r)$  en  $M$  ( $r \neq 0$ ).

3. Pour une fonction ne dépendant que de la variable  $r$ , le laplacien en coordonnées sphériques a pour expression :

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2 r V(r)}{dr^2}$$

En déduire l'équation différentielle vérifiée par le potentiel électrostatique.

4. On se place dans le cas des hautes températures  $k_B T \gg eV(r)$ . Simplifier l'équation précédente et la résoudre en posant  $f(r) = rV(r)$ . On choisira l'origine des potentiels à l'infini, et on utilisera le fait qu'au voisinage de l'ion, le potentiel est essentiellement dû à  $Ar^+$ . On fera apparaître une longueur caractéristique  $\lambda_D$ , appelée longueur de Debye.

5. Pourquoi parle-t-on d'effet d'écran ? Calculer  $\lambda_D$  pour l'argon dans le cas où  $n_e = 3,0 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$  et  $T_1 = 10^3 \text{ K}$  puis pour  $T_2 = 10^4 \text{ K}$ .

On donne  $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

6. Calculer le champ électrostatique et en déduire la charge totale contenue dans une sphère de rayon  $r$ . Étudier les cas limites  $r \gg \lambda_D$  et  $r \ll \lambda_D$ .

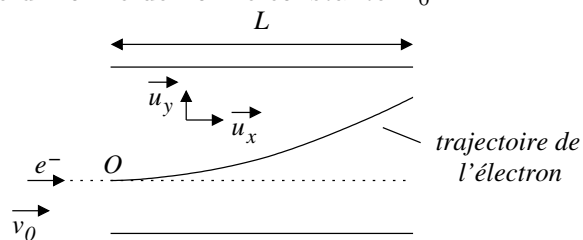
**Réponses.** 2 :  $\rho(r) = -2en_e \text{sh} \left( \frac{eV(r)}{k_B T} \right)$ ; 3 :  $\frac{1}{r} \frac{d^2 [rV(r)]}{dr^2} = \frac{2en_e}{\varepsilon_0} \text{sh} \left( \frac{eV(r)}{k_B T} \right)$ ;

4 :  $V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}$ ; 5 :  $\lambda_{D,1} = 2,8 \times 10^{-8} \text{ m}$ ,  $\lambda_{D,2} = 8,9 \times 10^{-8} \text{ m}$ ;

6 :  $\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda_D} \right) \vec{u}_r$ ;  $Q(r) = e \times e^{-r/\lambda_D} \left( 1 + \frac{r}{\lambda_D} \right)$

### EM139. Déviation d'un électron (\*\*)

Un électron de masse  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , d'énergie cinétique  $\mathcal{E}_{c,0} = 80 \text{ eV}$  pénètre avec une vitesse horizontale dans une cavité de largeur  $L = 0,10 \text{ m}$ , où règne un champ électrique uniforme de norme constante  $E_0$ .



1. Représenter la direction et le sens du champ électrostatique sur la figure.

Lors de la traversée de la cavité de largeur  $L$ , l'énergie cinétique de l'électron varie de  $\Delta\mathcal{E}_c = 10 \text{ eV}$ .

2. Déterminer  $E_0$  en fonction des données du problème.

3. Évaluer l'angle de déviation de la trajectoire en sortie de la zone où règne le champ électrostatique.

**Réponses.** 1 :  $\vec{E} = -E_0 \vec{u}_y$ ; 2 :  $E_0^2 = \frac{4\mathcal{E}_{c,0} \Delta\mathcal{E}_c}{e^2 L^2}$ ,  $E_0 = 5,7 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ; 3 :  $\tan(\alpha) = \frac{eE_0 L}{2\mathcal{E}_{c,0}}$ ,  $\alpha = 0,34 \text{ rad} \simeq 19^\circ$