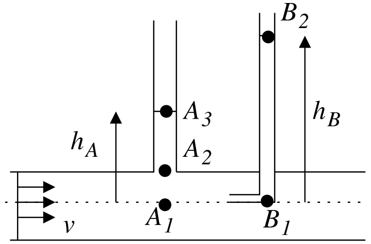
TD06 : bilans (correction)

Bilan046. Tube de Pitot (*)

→ Entre A_1 et A_2 le système se déplace en bloc, puis l'eau est immobile entre A_2 et A_3, la loi de l'hydrostatique est applicable entre A_1 et A_3 :

$$P_{A_1} = P_{A_3} + \rho g h_A = P_0 + \rho g h_A$$



→ On applique la relation de Bernoulli entre A_1 et B_1 (fluide au repos en B_1, point d'arrêt) :

$$P_{A_1} + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_{B_1}$$

→ Entre B_1 et B_2, on applique la loi de l'hydrostatique pour le fluide au repos :

$$P_{B_1} = P_{B_2} + \rho g h_B = P_0 + \rho g h_B$$

En combinant les trois relations, on en déduit :

$$v^2 = 2g(h_B - h_A)$$

Et donc pour le débit volumique, en appelant S la section :

$$\boxed{D_v = S \times \sqrt{2g(h_B - h_A)}}$$

Bilan014. Vidange d'un réservoir (**)

1. Le régime est permanent, l'écoulement incompressible et homogène (eau) et on négligera les phénomènes dissipatifs.
   On applique la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre A un point de la surface libre au repos et B un point **à l'air libre** (pression atmosphérique) au niveau de la sortie de l'orifice :
   $$\frac{P_0}{\mu} + g z_A = \frac{P_0}{\mu} + \frac{v_0^2}{2} + g z_B$$
   On en déduit $\boxed{v_0 = \sqrt{2gh_0}}$.
2. Pendant dt, on perd un volume $-dh \times S$ (au niveau de la surface libre), dh est négatif, le niveau baisse. Dans la même durée, un volume $sv(t)dt$ s'écoule en sortie. Pour un écoulement incompressible, le débit volumique est le même en entrée et en sortie du dispositif, ce qui impose :
   $$\boxed{-S\frac{dh}{dt} = sv(t)}$$
3. En utilisant les deux expressions donnant $v(t)$, on obtient l'équation différentielle :
   $$-\frac{S}{s}\frac{dh(t)}{dt} = \sqrt{2gh(t)} \quad \text{donc} \quad \frac{dh}{h^{1/2}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}dt$$
   On intègre cette équation entre $t = 0$ et t quelconque, pour des hauteurs de fluide variant de h_0 à $h(t)$:
   $$2h(t)^{1/2} - 2h_0^{1/2} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g} \times t \quad \text{donc} \quad \boxed{h(t)^{1/2} = h_0^{1/2} - \frac{s}{2S}\sqrt{2g} \times t}$$
   La durée de vidange correspond à $h(T) = 0$, soit :
   $$h_0^{1/2} = \frac{s}{2S}\sqrt{2g} \times T \quad \text{donc} \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{S}{s}}$$

Bilan029. Vase de Tantale (***)

1. La relation de Bernoulli s'applique pour l'écoulement homogène et incompressible en régime permanent et en l'absence de dissipation le long d'une ligne de courant :
   $$P_A + \rho\frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A = P_B + \rho\frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B$$
2. <u>Première étape</u> : amorçage du siphon.
   Du fait du débit D entrant, la cuve se remplit et le niveau monte jusqu'à h_2, le siphon s'amorce alors et la vidange commence.
   <u>Deuxième étape</u> : vidange du réservoir.
   Pour un débit sortant supérieur au débit entrant, le réservoir se vide et le niveau baisse jusqu'à ce que le siphon se désamorce pour $h = h_1$.
   En l'absence de débit sortant, le niveau peut à nouveau remonter et on observe une vidange périodique du réservoir.

   Ce fonctionne périodique est possible si, lors de la vidange, le débit sortant reste supérieur au débit D, dans le cas contraire s'il existe $h \in [h_1, h_2]$ telle que les débits s'égalisent le niveau reste alors fixé.
3. Pour observer le fonctionnement périodique, le débit sortant doit rester supérieur au débit D pour toutes les valeurs de $h \in [h_1, h_2]$.

   En supposant la section du réservoir très grande vis à vis de la section de sortie, le niveau va baisser lentement vis à vis du temps mis par une particule pour parcourir le siphon, on peut alors appliquer la relation de Bernoulli pour ce régime quasi-stationnaire. Pour le siphon amorcé, on applique la relation de Bernoulli entre un point A à la surface du réservoir et un point B à la sortie du siphon. L'origine des altitudes est prise au fond du réservoir.

$$\frac{1}{2}v_A^2 + \frac{P_A}{\rho} + gh = \frac{1}{2}v_B^2 + \frac{P_B}{\rho}$$

Les points A et B étant à l'air libre, $P_A = P_B = P_0$ la pression atmosphérique. Pour ce fluide incompressible, le débit volumique se conserve $v_A S = v_B s$, comme $S \gg s$, on peut négliger la vitesse en A vis à vis de la vitesse en B, finalement :

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Ce qui donne pour le débit volumique sortant : $\boxed{D_\mathrm{s} = s\sqrt{2gh}}$.

Le débit sortant est minimal pour $h = h_1$, cette valeur doit être supérieure à celle du débit entrant :

$$\boxed{D < D_1 = s\sqrt{2gh_1}}$$

A.N. : $D_1 = 1,0 \times 10^{-4} \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,10}$ $\boxed{D_1 = 0,14 \text{ L/s}}$.

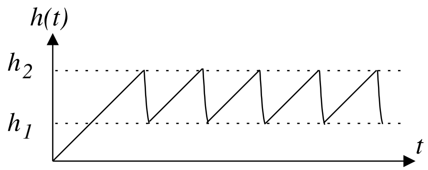
4. Comme $D_1 \gg D$, on peut négliger la durée de la vidange vis à vis de la durée associée à l'amorçage du siphon.
Lorsque le siphon est désamorcé, partant de $h = h_1$, le niveau monte de dh pendant une durée dt, l'augmentation du volume d'eau $\delta V = S \times dh$ est égal au volume d'eau apporté $D \times dt$. On néglige le volume du siphon vis à vis de celui du réservoir.

$$Sdh = Ddt \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{D}{S} \quad \Rightarrow \quad h(t) = h_1 + \frac{D}{S}t$$

La durée de remplissage t_r correspond à la montée du niveau jusqu'à la hauteur h_2 :

$$h_2 = \frac{D}{S}t_r + h_1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_r = \frac{S}{D}(h_2 - h_1)}$$

A.N. : $t_r = \dfrac{100 \times 10^{-4}}{0,014 \times 10^{-3}} \times 0,30 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_r = 214 \text{ s}}$.



5. La durée de remplissage est identique. Il faut maintenant déterminer la durée de la vidange ; pour cela on réalise à nouveau un bilan similaire au précédent en tenant compte du débit sortant D_s :

$$Sdh = (D - D_s)\,dt \quad \Rightarrow \quad Sdh = \left(D - s\sqrt{2gh}\right)dt$$

On sépare les variables et on fait apparaître le débit D_1 :

$$\frac{dh}{D - s\sqrt{2gh}} = \frac{dt}{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{D/D_1 - s\sqrt{2gh}/D_1} = \frac{D_1 dt}{S}$$

On en déduit avec $D_1 = s\sqrt{2gh_1}$:

$$\frac{dh}{D/D_1 - \sqrt{h/h_1}} = \frac{D_1 dt}{S}$$

Pour utiliser l'intégrale proposée, on pose $u = h/h_1$:

$$\frac{h_1 du}{D/D_1 - \sqrt{u}} = \frac{D_1 dt}{S} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{D/D_1 - \sqrt{u}} = \frac{D_1 dt}{Sh_1}$$

Lors de la vidange, h varie de h_2 à h_1 en un temps t_v, donc u varie de h_2/h_1 à $h_1/h_1 = 1$:

$$\int_{h_2/h_1}^{1} \frac{du}{D/D_1 - \sqrt{u}} = \frac{D_1}{Sh_1}\int_0^{t_v} dt = \frac{D_1 t_v}{Sh_1}$$

Grâce à l'indication de l'énoncé, on obtient avec $a = h_2/h_1$ et $\lambda = D/D_1$:

$$\boxed{t_v = \frac{2Sh_1}{D_1}\left[\sqrt{\frac{h_2}{h_1}} - 1 + \frac{D}{D_1}\ln\left(\frac{\sqrt{h_2/h_1} - D/D_1}{1 - D/D_1}\right)\right]}$$

A.N. : avec $D/D_1 \simeq 1/10$,

$$t_v = \frac{2 \times 100 \times 10^{-4} \times 0,10}{0,14 \times 10^{-3}} \times \left[\sqrt{4} - 1 + \frac{1}{10}\ln\left(\frac{\sqrt{4} - 1/10}{1 - 1/10}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_v \simeq 15 \text{ s}}$$

La période est la somme des deux durées :

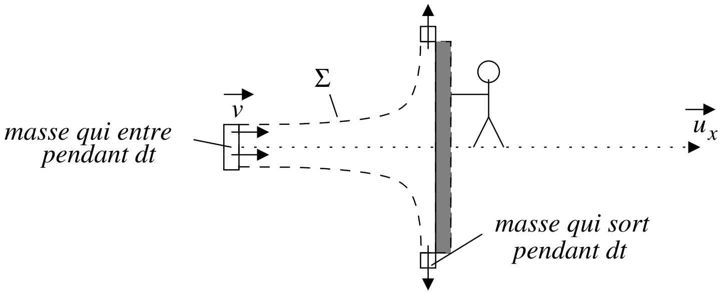
$$\boxed{T = t_r + t_v \simeq 2,3 \times 10^2 \text{ s}}$$

Bilan016. Jet sur une plaque (**)

On applique un bilan de quantité de mouvement sur le système constitué de l'eau à l'intérieur de la surface Σ, de l'eau qui entre dans Σ pendant dt et de la plaque. Le système est soumis aux forces de pression et à l'action de l'opérateur :

$$d\vec{p} = \left(\vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{op.}}\right)dt = \left(-\oiint P_0 d\vec{S} + \vec{F}_{\text{op.}}\right)dt = \vec{F}_{\text{op.}}dt$$

La pression étant uniforme sur la totalité de la surface fermée, la résultante des forces de pression est nulle.



Compte tenu du régime permanent : $d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \delta\vec{p}_s - \delta\vec{p}_e$

Du fait de la symétrie du problème en sortie : $\delta\vec{p}_s = \vec{0}$, de plus $\delta\vec{p}_e = \delta m\vec{v}$. On en déduit finalement :

$$-\delta\vec{p}_e = -\delta m\vec{v} = \vec{F}_{\text{op.}}dt \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{op.}} = \frac{-\delta m}{dt}\vec{v} = -D_m\vec{v}$$

La personne subit la force opposée à celle qu'elle exerce :

$$\boxed{\vec{F} = D_m\vec{v}}$$

Bilan015. Propulsion d'une fusée (**)

1. Pour cet exercice, le régime n'est pas permanent, il faut effectuer le bilan de quantité de mouvement avec prudence.
   Comme proposé dans l'énoncé, dans le référentiel géocentrique galiléen, on applique le théorème de la résultante cinétique au système $\mathcal{S}$ constitué, à l'instant t, par la fusée et son contenu.
   $$d\vec{p} = m(t)\vec{g} \times dt$$
   ⋆ À l'instant t le système $\mathcal{S}$ est entièrement situé dans la fusée, sa masse est $M(t)$ et sa vitesse est, selon Oz, $v(t)$:
   $$p(t) = M(t)v(t)$$
   ⋆ À l'instant $t + dt$, le système $\mathcal{S}$ est constitué de la fusée et du fluide éjecté ; la fusée a une masse $M(t + dt) = M(t) + dM$ et une vitesse $v(t + dt) = v(t) + dv$, le fluide éjecté a une masse $-dM$ et une vitesse $(v(t) - u)$ par rapport au référentiel géocentrique :
   $$p(t+dt) = (M(t)+dM)(v(t)+dv) + (-dM) \times (v(t)-u)$$
   $$dp = p(t+dt) - p(t) = M(t)dv + dM \times u \quad \text{à l'ordre 1}$$
   On en déduit :
   $$dp = M(t)dv + dM \times u = -M(t)gdt \quad \text{donc} \quad \frac{dv}{dt} = -g - \frac{1}{M(t)}\frac{dM}{dt} \times u$$
   Comme $dM < 0$ (le mélange combustible est éjecté), $D_m = -dM/dt$:
   $$\boxed{\frac{dv}{dt} = -g + \frac{1}{M(t)} \times D_m \times u \quad \text{avec} \quad M(t) = M_0 + m(t)}$$
2. La fusée décolle si l'accélération initiale est positive :
   $$-g + \frac{1}{M(0)} \times D_m \times u > 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{D_m > D_{m,0} = \frac{(M_0+m_0)g}{u}}$$
3. À l'instant initial, la masse de combustible est m_0.
   Le combustible est éjecté avec un débit massique D_m, à l'instant t, il reste :
   $$m(t) = m_0 - D_m \times t$$
   On peut alors intégrer l'accélération pour obtenir la vitesse :
   $$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{D_m u}{M_0 + m_0 - D_m t} \qquad \boxed{v(t) = -gt - u\ln\left(\frac{M_0+m_0-D_m t}{M_0+m_0}\right)}$$
   Le combustible est entièrement consommé à l'instant t_f défini par :
   $$m(t_f) = 0 = m_0 - D_m t_f \quad \text{donc} \quad \boxed{t_f = m_0/D_m}$$
   Ce qui donne pour la vitesse à l'instant t_f :
   $$\boxed{v_f = -\frac{gm_0}{D_m} + u\ln\left(\frac{M_0+m_0}{M_0}\right)}$$

Bilan009. Propulsion d'un navire (***)

1. Quantité de mouvement :
   (a) Pour une ligne de courant en amont :
   $$p_0 + \frac{\mu v_1^2}{2} = p + \frac{\mu v^2}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{p = p_0 + \frac{\mu}{2}(v_1^2 - v^2)}$$
   Pour une ligne de courant en aval :
   $$p_0 + \frac{\mu v_2^2}{2} = p' + \frac{\mu v'^2}{2} \quad \text{donc} \quad p' = p_0 + \frac{\mu}{2}(v_2^2 - v'^2)$$
   Le régime stationnaire implique la conservation du débit massique, la masse volumique étant constante, on en déduit la conservation du débit volumique :
   $$Sv = S'v' \quad \text{donc} \quad v = v'$$
   La dernière relation sur les pressions prend alors la forme simplifiée :
   $$\boxed{p' = p_0 + \frac{\mu}{2}(v_2^2 - v^2)}$$

(b) On applique le théorème de la résultante cinétique au système comprenant le fluide contenu à l'instant t entre S et S' et le fluide qui va entrer pendant dt dans ce domaine.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}^{pression}$$

Du fait de la symétrie sur la paroi latérale, les forces de pression s'exerçant sur S_{lat} se compensent et il reste donc à considérer les forces en amont et en aval :

$$\vec{F}^{pression} = (pS - p'S')\,\vec{u}_x \simeq (p - p')S\vec{u}_x$$

Le régime étant stationnaire, la variation de quantité de mouvement se limite aux quantités qui entrent et sortent du domaine pendant dt :

$$d\vec{p} = (\delta m v' - \delta m v)\,\vec{u}_x = \vec{0} \quad \text{car} \quad v = v'$$

On en déduit, en utilisant les expressions des pressions obtenues grâce à la relation de Bernoulli :

$$\vec{F} = S(p' - p)\vec{u}_x \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{F} = \frac{S\mu}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)\vec{u}_x}$$

(c) On considère maintenant le système constitué à l'instant t, du fluide contenu entre S_1 et S_2 et du fluide qui entre dans ce domaine pendant dt.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}^{pression}$$

La pression est uniforme sur l'ensemble de la surface de contrôle, $\vec{F}^{pression} = \vec{0}$.

Le régime étant stationnaire, la variation de quantité de mouvement se limite aux quantités qui entrent et sortent du domaine pendant dt :

$$d\vec{p} = (\delta m v_2 - \delta m v_1)\,\vec{u}_x$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{F} = D_m(v_2 - v_1)\vec{u}_x}$$

Avec $D_m = \dfrac{\delta m}{dt} = \mu S v = \mu S_1 v_1 = \mu S_2 v_2$.

(d) De la comparaison des deux expressions, on en déduit :

$$\vec{F} = \mu S v\,(v_2 - v_1)\,\vec{u}_x = \frac{S\mu}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)\vec{u}_x \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{v_1 + v_2}{2} = v}$$

2. Énergie cinétique :

(a) On applique le théorème de la puissance cinétique au système constitué à l'instant t, du fluide contenu entre S_1 et S_2 et du fluide qui entre dans ce domaine pendant dt. Le fluide étant parfait et incompressible, on peut négliger la puissance des forces intérieures.

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P} + \mathcal{P}^{pression}$$

Les forces de pression étant perpendiculaires au déplacement du fluide sur la surface latérale, la puissance des forces de pression se limite à la puissance en amont et en aval :

$$\mathcal{P}^{pression} = p_0 S_1 v_1 - p_0 S_2 v_2$$

Le régime étant stationnaire, la variation d'énergie cinétique se limite aux termes entrant et sortant :

$$dE_c = \frac{1}{2}\delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\delta m v_1^2 = \frac{1}{2}(\mu S_2 v_2 dt)v_2^2 - \frac{1}{2}(\mu S_1 v_1 dt)v_1^2$$

On en déduit :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\mu S_2 v_2 v_2^2 + p_0 S_2 v_2 - \left(\frac{1}{2}\mu S_1 v_1 v_1^2 + p_0 S_1 v_1\right)$$

$$\mathcal{P} = S_2 v_2\left(\frac{\mu v_2^2}{2} + p_0\right) - S_1 v_1\left(\frac{\mu v_1^2}{2} + p_0\right)$$

La conservation du débit volumique assure $S_2 v_2 = S_1 v_1$, donc :

$$\mathcal{P} = S_2 v_2\left(\frac{1}{2}\mu v_2^2 - \frac{1}{2}\mu v_1^2\right) = \frac{S_2 v_2 \mu}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad \boxed{\mathcal{P} = \frac{D_m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)}$$

Comme $\mathcal{P} = \dfrac{D_m}{2}(v_2 - v_1) \times (v_2 + v_1)$, $F = D_m(v_2 - v_1)$ et $2v = v_1 + v_2$, on en déduit :

$$\boxed{\mathcal{P} = F \times v}$$

(b) Pour une hélice $\mathcal{P} > 0$, le fluide est accéléré, $v_2 > v_1$, la conservation du débit volumique est cohérente avec le resserrement du tube de courant.

Bilan030. Rendement d'un ventilateur (**)

Le but d'un ventilateur est de créer un courant d'air. Le rendement du ventilateur est le rapport de l'énergie cinétique produite par l'énergie fournie par le moteur. Pendant dt, l'air émis est contenu dans un cylindre de longueur vdt et de section $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$, ce qui représente une masse $\delta m = \rho \times vdt \times \dfrac{\pi D^2}{4}$. Cette masse accélérée à la vitesse v contient une énergie $\delta E_c = \delta m v^2/2$, ce qui donne pour le rendement :

$$r = \frac{\delta E_c}{\mathcal{P}dt} = \frac{\rho \times vdt \times \dfrac{\pi D^2}{4} \times \dfrac{v^2}{2}}{\mathcal{P}dt} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho\pi D^2 v^3}{8\mathcal{P}}$$

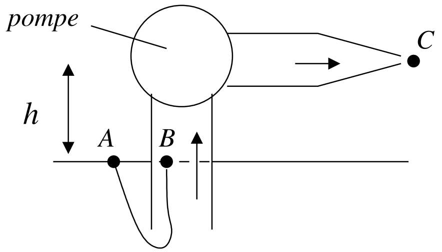
Application numérique :

$$r = \frac{1,2 \times \pi \times 0,80^2 \times 40^3}{8 \times 27 \times 10^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = 71\%}$$

Bilan001. Puissance d'une pompe (**).

Dans un premier temps, on néglige toute perte de charge et on suppose un rendement égal à 100% pour le moteur.

Pour l'écoulement stationnaire de ce fluide incompressible, on applique le premier principe industriel entre A et C.



On néglige les aspects thermiques, et on appelle $\mathcal{P}$ la puissance de la pompe :

$$D_m \left[h_C - h_A + \frac{v_C^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_C - z_A) \right] = \mathcal{P}$$

L'enthalpie massique s'écrit $h = u + P/\rho$, pour ce fluide incompressible, l'énergie interne ne dépend que de la température et si on néglige la variation de température de l'eau entre l'entrée et la sortie : $h_C - h_A = \dfrac{P_C - P_A}{\rho}$. On en déduit :

$$D_m \left(\frac{P_C - P_A}{\rho} + \frac{1}{2} v_C^2 - \frac{1}{2} v_A^2 + gh \right) = \mathcal{P}$$

A et C étant à l'air libre $P_C = P_A = P_0$, de plus, compte tenu de la différence des surfaces en entrée et en sortie, on peut supposer $v_A \ll v_C$, on en déduit, avec $D_m = \rho Q$:

$$\mathcal{P} = \rho Q g h + \frac{\rho}{2} Q v_C^2$$

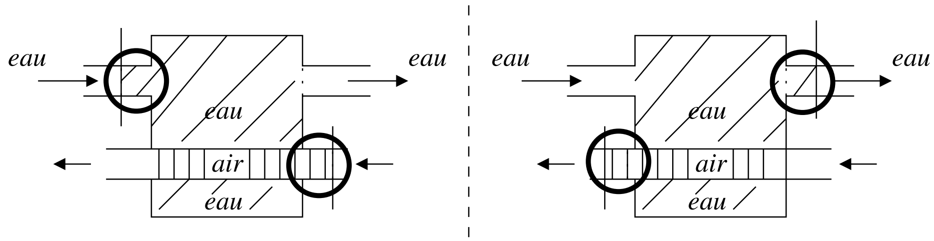
La perte de charge h_v est équivalente à une baisse d'altitude h_v du fluide. Comme le fluide sort bien à l'altitude prévue, la pompe doit fournir une puissance supplémentaire permettant d'élever le fluide d'une hauteur h_v. On prend donc en compte cette perte de charge en remplaçant h par $h + h_v$ dans l'équation précédente. Du fait du rendement η, la puissance du moteur doit être $1/\eta$ fois plus grande que la puissance théorique, il reste enfin à exprimer la puissance en fonction du diamètre et du débit volumique pour finalement obtenir :

$$\mathcal{P}_m = \frac{\rho Q}{\eta} \left[g\,(h + h_v) + \frac{8Q^2}{\pi^2 D_2^4} \right]$$

$$\mathcal{P}_m = \frac{1,0 \times 10^3 \times 27 \times 10^{-3}}{0,75} \left[9,81 \times 3,5 + \frac{8 \times (27 \times 10^{-3})^2}{\pi^2 \times 0,03^4} \right] \qquad \boxed{\mathcal{P}_m = 27,5 \text{ kW}}$$

Bilan011. Échangeur en régime stationnaire (**)

1. Pour ce système en régime stationnaire, on applique un bilan d'enthalpie au système constitué, à l'instant t, de l'eau et de l'air dans l'échangeur et de l'eau et de l'air qui s'apprêtent à entrer dans l'échangeur pendant dt (Cf. schéma) :



à l'instant t *à l'instant t+dt*

On néglige l'énergie cinétique massique du fluide vis à vis de l'enthalpie massique (l'objectif de l'échangeur est de modifier la température des fluides et non pas de les accélérer).

$$dH = \delta Q^{ext} + \delta W_u = 0$$

L'enthalpie du système se préserve car il semble en effet raisonnable de négliger les transferts thermiques avec l'extérieur et il n'y a pas de travail utile.

Le régime étant stationnaire, la variation d'enthalpie se limite aux termes qui entrent et sortent de l'échangeur pendant dt. On note i les termes à l'entrée, f les termes en sortie, l'exposant e désigne l'eau et a l'air :

$$\delta m^e \left(h_f^e - h_i^e \right) + \delta m^a \left(h_f^a - h_i^a \right) = 0$$

Pour le gaz supposé parfait : $h_f^a - h_i^a = c_{p,air}(T_0 - T_1)$ et pour l'eau, fluide incompressible, $h_f^e - h_i^e = c_e(\theta_s - \theta_e)$.

On divise par dt le bilan énergétique pour faire apparaître les débits massiques fournis dans l'énoncé :

$$d_e c_e(\theta_s - \theta_e) + d_{air} c_{p,air}(T_0 - T_1) = 0$$

$$\boxed{\theta_s - \theta_e = \frac{d_{air}}{d_e}\frac{c_{p,air}}{c_e}\left(T_1 - T_0\right)}$$

2. Application numérique :
$$\theta_s = 12 + \frac{6,5}{100} \times \frac{1,0}{4,18} \times 200 \quad \text{donc} \quad \boxed{\theta_s = 15,1°\mathrm{C}}$$

Bilan035. Puits canadien (**)

1. Pour un gaz parfait, l'enthalpie massique ne dépend que de la température :
$$\Delta h = c_p \Delta T \quad \text{avec} \quad \boxed{c_p = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}}$$
L'expression de c_p s'obtient en utilisant la relation de Mayer.
2. α correspond à une puissance par unité de longueur et de température, c'est à dire, dans le système international d'unités, en $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.
3. Pour cet écoulement stationnaire, on applique un premier principe industriel pour une tranche de fluide située entre x et $x+dx$. On néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle :
$$D_m\left[h(x+dx) - h(x)\right] = \delta P_{th} = \alpha dx\left(T_{sol} - T(x)\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad D_m c_p \frac{dT}{dx} = \alpha\left(T_{sol} - T(x)\right)$$
On en déduit :
$$\boxed{\frac{dT}{dx} + \frac{\alpha}{D_m c_p}T(x) = \frac{\alpha}{D_m c_p}T_{\text{sol}}} \quad \text{avec} \quad l_0 = \frac{D_m c_p}{\alpha}$$
4. La solution de cette équation est $T(x) = T_{\text{sol}} + Ae^{-x/l_0}$; compte tenu de la condition à l'entrée $T(x=0) = T_{\text{ext}}$, on en déduit :
$$\boxed{T(x) = T_{\text{sol}} + \left(T_{\text{ext}} - T_{\text{sol}}\right)e^{-x/l_0}}$$
La température peut atteindre T_{sol} pour $x \gg l_0$.
5. Première méthode :
La puissance thermique reçue par l'air est la somme des puissances thermiques élémentaires reçues sur l'ensemble de la longueur L ; en reportant l'expression obtenue pour la température :
$$P_{th} = \int_0^L \alpha\left(T_{\text{sol}} - T_{\text{ext}}\right)e^{-x/l_0}dx$$
Ce qui donne par intégration :
$$\boxed{P_{th} = D_m c_p\left[T_{\text{sol}} - T_{\text{ext}}\right] \times \left[1 - e^{-L/l_0}\right]}$$
Seconde méthode : on applique le premier principe industriel sur l'ensemble de la longueur du tuyau :
$$D_m \times \left[h_{(x=L)} - h_{(x=0)}\right] = P_{th}$$
On en déduit :
$$P_{th} = D_m c_p\left[T(L) - T(0)\right] = D_m\left[T_{\text{sol}} + \left(T_{\text{ext}} - T_{\text{sol}}\right)e^{-L/l_0} - T_{ext}\right]$$
$$\boxed{P_{th} = D_m c_p\left(T_{\text{sol}} - T_{\text{ext}}\right)\left[1 - e^{-L/l_0}\right]}$$
6. Pour $L \gg l_0$, $\boxed{P_{th}(L) = D_m c_p\left(T_{\text{sol}} - T_{\text{ext}}\right)}$. On constate que la puissance limite dépend de D_m mais pas du diamètre de la conduite.
7. La tangente à l'origine coupe l'asymptote associée à la valeur finale pour $x = l_0$.
8. À débit fixé, pour un diamètre plus grand, la surface d'échange augmente et l'échange est alors plus efficace.

Bilan020. Adduction d'un village (***)

1. Absence de dissipation :
   (a) Pour cet écoulement stationnaire, on applique le premier principe industriel pour l'eau entre l'altitude $z = 0$ du bassin (indice 1) et l'altitude $z = z_c$ du château d'eau (indice 2) :
$$D_m\left(h_2 + e_{c2} + e_{p2} - h_1 - e_{c1} - e_{p1}\right) = \mathcal{P}_{\text{meca.}} + \mathcal{P}_{th.}$$
$\rightarrow h_2 - h_1 = \underbrace{u_2 - u_1}_{\simeq 0} + \frac{P_2}{\mu} - \frac{P_1}{\mu}$; on suppose que la température de l'eau ne varie pas, les énergies internes massiques sont donc identiques. De plus, l'eau étant à l'air libre à l'entrée et à la sortie $P_1 = P_2 = P_0$.

   $\rightarrow e_{c2} - e_{c1} \simeq 0$; l'eau est globalement au repos dans les réservoirs. De plus l'objectif est de pomper un liquide et de l'amener à une altitude plus élevée et non de l'accélérer.
   $\rightarrow e_{p_2} - e_{p1} = g\left(z_c - 0\right)$
   $\rightarrow P_{th.} = 0$ (on néglige les transferts thermiques) et $\mathcal{P}_{\text{meca.}} = \mathcal{P}dt$ l'énergie mécanique fournie par la pompe durant la durée dt.

   On en déduit :

$$\delta m g z_c = \mathcal{P} dt \quad \Rightarrow \mathcal{P} = D_m g z_c$$

Pour un fluide incompressible $D_m = \mu D_v$ et finalement :

$$\boxed{\mathcal{P} = \mu D_v g z_c}$$

(b) Écrite sous la forme $Pdt = dmgz_c$, cette expression indique qu'en l'absence de pertes au sein de la canalisation, l'énergie apportée par la pompe est convertie en énergie potentielle pour amener l'eau de la surface du bassin (à la pression P_0 et l'altitude nulle) à la surface du château (pression P_0, altitude z_c)

(c) Application numérique :

$$\mathcal{P} = 10^3 \times \frac{125}{3600} \times 9,81 \times 250 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P} = 85,2 \text{ kW}}$$

2. Pertes de charge régulières

(a) Vitesse débitante : $U = \dfrac{D_v}{\pi D^2/4} = \dfrac{125/3600}{\pi 0,20^2/4}$ donc $U = 1,1 \text{ m.s}^{-1}$

Nombre de Reynolds :

$\mathrm{R}_e = \dfrac{\mu U D}{\eta} = \dfrac{10^3 \times 1,1 \times 0,20}{10^{-3}}$ donc $\mathcal{R}_e = 2,2 \times 10^5$

Le régime est turbulent, **la loi de Hagen-Poiseuille ne s'applique pas**.

(b) Avec $\mathcal{R}_e = 2,2 \times 10^{-5}$ et $\varepsilon = \dfrac{k}{D} = \dfrac{10^{-3}}{0,20} = 5 \times 10^{-3}$, on obtient par lecture graphique :

$$\boxed{\Lambda_r \simeq 0,03}$$

(c) De la définition du coefficient de perte de charge, on en déduit la baisse de pression :

$$\Delta P = \Lambda_r \frac{L_a + L_r}{D} \times \frac{1}{2}\mu U^2$$

→ Partant de la pression atmosphérique au niveau du bassin, l'eau est élevée à l'altitude z_c à la même pression. La baisse de pression dans les conduites doit être compensée par la pompe qui doit donc augmenter la pression de ΔP.

→ On peut toujours assimiler une variation de pression à la hauteur d'une colonne d'eau telle que $\Delta P = \mu g \Delta h$. Il est donc équivalent de dire que la pompe doit fournir l'énergie pour élever l'eau sur Δh telle que :

$$\boxed{\Delta h = \Lambda_r \left(\frac{L_a + L_r}{D}\right) \times \frac{U^2}{2g}}$$

(d) En présence de pertes régulières, il faut maintenant élever l'eau sur une hauteur $z_c + \Delta h$, donc :

$$\boxed{\mathcal{P} = \mu D_v g \left(z_c + \Delta h\right)}$$

Application numérique :

$$\Delta h = 0,03 \times \frac{3220}{0,20} \times \frac{1,1^2}{2 \times 9,81} = 29,8 \text{ m} \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{P} = 95,4 \text{ kW}}$$

3. Pertes de charge singulières

Du fait des pertes de charges singulières, la baisse de pression vaut :

$$\Delta P = (\Lambda_{s,a} + \Lambda_{s,r}) \times \frac{1}{2}\mu U^2$$

Ce qui correspond à une hauteur d'eau :

$$\Delta h_2 = (\Lambda_{s,a} + \Lambda_{s,r}) \times \frac{U^2}{2g}$$

Et finalement pour la nouvelle puissance :

$$\mathcal{P} = \mu D_v g \left(z_c + \Delta h + \Delta h_2\right)$$

Application numérique :

$$\Delta h_2 = 0,42 \text{ m} \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{P} = 95,5 \text{ kW}}$$

4. La pression est la plus faible à l'entrée de la pompe (appelons ce point E), ensuite la pompe augmente la pression du fluide pour lui permettre d'atteindre le château d'eau.

Si on ne tenait pas compte des pertes de charge, la relation de Bernoulli entre le bassin et l'entrée de la pompe s'écrirait :

$$P_E + \frac{1}{2}\mu U^2 + \mu g z_p = P_0 \quad \Rightarrow \quad P_E = P_0 - \frac{1}{2}\mu U^2 - \mu g z_p$$

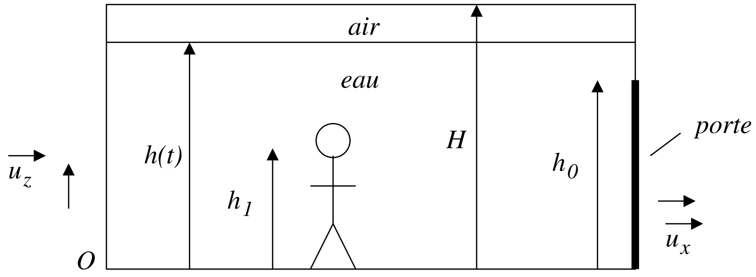
Compte tenu des pertes de charge régulière et singulière, la pression en E vaut en réalité :

$$P_E = \left(P_0 - \frac{1}{2}\mu U^2 - \mu g z_p\right) - \Lambda_r \frac{L_a}{D} \times \frac{1}{2}\mu U^2 - \Lambda_{s,a} \times \frac{1}{2}\mu U^2$$

L'application numérique conduit à $P_E = 65$ kPa. Cette valeur est supérieure à la valeur de pression saturante, il n'y pas de risque de cavitation.

Bilan060. Risque de noyade (***)

Première situation : on considère une pièce de surface au sol $S = 10$ m^2 de hauteur sous plafond $H = 2,5$ m. On considère une porte de hauteur $h_0 = 2,0$ m, de largeur $b = 80$ cm. La personne a une taille de 1,80 m avec la bouche située à environ $h_1 = 1,6$ m.



Dans un premier temps, on suppose que l'eau ne s'échappe pas de la pièce. L'eau est supposée atteindre le plafond de la pièce en laissant cependant une poche d'air résiduelle permettant de définir une pression égale à la pression atmosphérique au niveau du plafond.

En appliquant la loi de l'hydrostatique, on en déduit que le champ des pressions est donné par : $p(z) = p_0 + \rho g(H - z)$. Étant donné que la pression atmosphérique s'exerce à l'extérieur, il suffit de considérer l'action de la surpression qui crée sur la porte une force :

$$\vec{F}_{surp.} = \int_{z=0}^{h_0} \int_{y=0}^{b} \rho g(H-z) dy dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{surp.} = \rho g b h_0 \left(H - h_0/2\right) \vec{u}_x}$$

C'est à dire :

$$\|\vec{F}_{surp}\| = 1,0 \times 10^3 \times 10 \times 0,80 \times 2,0 \times (2,5 - 1,0) = 24 \text{ kN}$$

Cette force correspond à l'effort nécessaire pour soulever une masse de 2,4 tonnes. C'est cette force que la personne doit compenser pour ouvrir la porte. En toute rigueur, la force de surpression s'exerce par symétrie au centre de la porte quand la poignée se situe à l'extrémité. On peut donc tenir compte d'un facteur 2 de gain grâce au bras de levier pour faire pivoter la porte **ce qui reviendrait à soulever une masse de 1,2 tonne ; il n'est donc pas possible d'ouvrir la porte.**

Deuxième situation : on tient maintenant compte d'un espacement $\ell = 0,5$ cm entre le sol et la porte ce qui permet une fuite d'eau sous la porte. La section s sous la porte étant très inférieure à S la surface de la pièce, il semble raisonnable de considérer un régime quasi-stationnaire. Dans le cas de l'eau, l'hypothèse d'un écoulement incompressible et parfait est réaliste, on peut alors appliquer la relation de Bernoulli entre un point de la surface à l'altitude $h(t)$ et un point en sortie pour en déduire la classique formule de Torricelli pour la vitesse en sortie (on suppose qu'une ouverture même faible au niveau du plafond permet de maintenir la pression à la pression atmosphérique au-dessus de l'eau malgré l'augmentation du volume d'air) :

$$v = \sqrt{2gh(t)}$$

Pendant dt, on perd un volume $-dh \times S$ (au niveau de la surface libre), dh est négatif, le niveau baissant. Dans la même durée, un volume $svdt$ s'écoule en sortie. Pour un écoulement incompressible, le débit volumique est le même en entrée et en sortie du dispositif, ce qui impose :

$$\boxed{-S\frac{dh}{dt} = sv}$$

On obtient l'équation différentielle :

$$-\frac{S}{s}\frac{dh(t)}{dt} = \sqrt{2gh(t)} \quad \text{donc} \quad \frac{dh}{h^{1/2}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}dt$$

On intègre cette équation entre $t = 0$ et T, pour des hauteurs d'eau variant de H à h_1 :

$$2h_1^{1/2} - 2H^{1/2} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g} \times T \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{S}{s} \times \sqrt{\frac{2}{g}} \times \left[H^{1/2} - h_1^{1/2}\right]}$$

A.N. : $T = \dfrac{10}{5,0 \times 10^{-3} \times 0,80} \times \sqrt{\dfrac{2}{10}} \times (\sqrt{2,5} - \sqrt{1,6}) = 3,5 \times 10^2$ s.

Il faut donc 6 minutes pour que l'homme ait à nouveau pied. On peut cependant envisager que l'homme puisse nager et respirer dans la poche d'air sous plafond pendant ces 6 minutes.

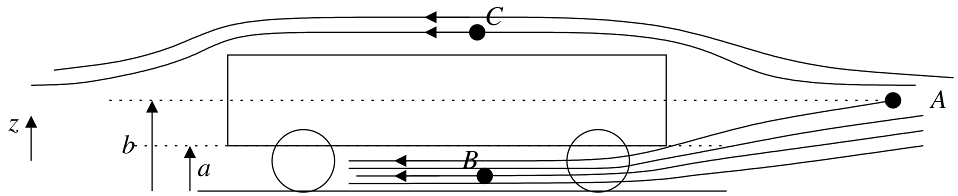
Troisième situation : si le modèle précédent continue à s'appliquer, on constate que la durée de vidange augmente avec la réduction de la section.

Cependant avec la réduction de l'ouverture et la diminution du débit (réduction du nombre de Reynolds), les effets de viscosité se feront plus présents et des pertes de charge seront à prendre en compte. Pour un écoulement particulièrement lent, on pourrait alors raisonner ainsi :
- déterminer en bas de la porte du côté de l'eau, la pression dans un modèle hydrostatique comme dans la première partie et conserver une pression atmosphérique à l'extérieur ;
- considérer la résistance hydraulique associée à la fine ouverture (modèle type Hagen-Poiseuille en géométrie cartésienne) ;
- en déduire le débit volumique au niveau de la fissure et la basse du niveau d'eau dans la pièce.

Bilan062. Effet de sol (**)

Modélisation et idée physique :

- on se place dans le référentiel du véhicule pour être en régime permanent ;
- le véhicule est modélisé par un profil rectangulaire avec une hauteur sous caisse égale à a et une demi-hauteur b (Cf. schéma) ;
- on note v_∞ la vitesse à l'infini du fluide qui est en norme la vitesse du véhicule ;
- les lignes de courant se resserrent sous le véhicule, l'augmentation de la vitesse entraîne une baisse de pression ce qui va plaquer la voiture au sol.



Mise en équations :

On applique la **relation de Bernoulli** sur une ligne de courant allant de A à B, l'approximation la plus grossière étant de considérer l'air comme un fluide incompressible. Cette hypothèse est cependant réaliste si la vitesse de la voiture disons 200 km $\cdot$ h^{-1} soit 60 m $\cdot$ s^{-1} est relativement faible devant la vitesse du son dans l'air $c_s = 340$ m $\cdot$ s^{-1}.

$$\frac{1}{2}v_A^2 + gz_A + \frac{P_A}{\mu} = \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B + \frac{P_B}{\mu}$$

$$\Leftrightarrow \quad P_B = P_A + \mu g(z_A - z_B) + \frac{1}{2}\mu\left(v_\infty^2 - v_B^2\right)$$

À grande distance du véhicule la pression peut être assimilée à la pression atmosphérique $P_A \simeq P_0$ et le terme lié à l'altitude est totalement négligeable, la pression dans l'air variant à l'échelle du kilomètre et non du mètre, en conséquence :

$$P_B \simeq P_0 + \frac{1}{2}\mu\left(v_\infty^2 - v_B^2\right)$$

La conservation du débit volumique pour les lignes de courant passant sous le véhicule impose :

$$v_\infty \times b = v_B \times a$$

En combinant les deux dernières relations, on en déduit :

$$P_B = P_0 + \frac{1}{2}\mu v_\infty^2\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]$$

En supposant les lignes de courant sur la partie supérieure peu affectées par la présence de la voiture, on en déduit $P_C \simeq P_0$ et finalement pour la force de surpression :

$$F = \Delta P \times S = (P_C - P_B) \times S \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2 S\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1\right]$$

Application numérique :

Avec une surface de l'ordre de 4 m^2, un rapport $b/a = 3$ et $\mu = 1,2$ kg $\cdot$ m^{-3} pour l'air, on en déduit :

$$F = \frac{1}{2} \times 1,2 \times (60)^2 \times 4 \times (3^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 7 \times 10^4 \text{ N}}$$

C'est à dire l'équivalent d'une masse de 7 tonnes qui plaque la voiture au sol.