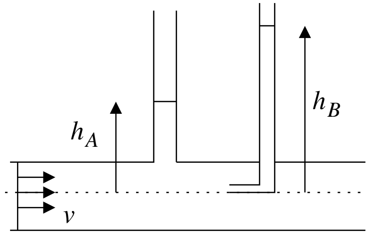
TD06 : bilans

Relation de Bernoulli

Bilan046. Tube de Pitot (*)

On considère deux tubes disposés sur un écoulement comme suit : le tube piézométrique est disposé sur la paroi de la conduite, et le tube de Pitot consiste en un orifice très petit faisant face à l'écoulement. On note S la section droite de l'écoulement.
Les deux extrémités hautes des tubes sont en contact avec l'atmosphère. On mesure la montée de fluide dans les deux tubes h_A et h_B.

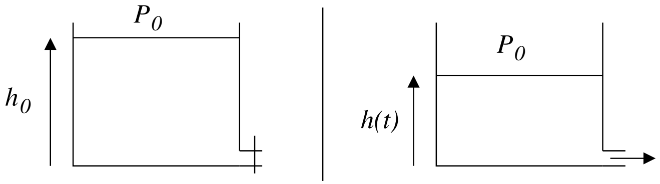


Exprimer le débit de la rivière en fonction des données.

Réponse : $D_v = S \times \sqrt{2g(h_B - h_A)}$

Bilan014. Vidange d'un réservoir (**)

On considère un réservoir cylindrique de section S disposant d'un orifice au niveau de sa base de section $s \ll S$ et fermé par un robinet.

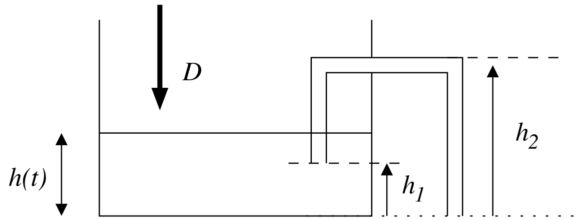


1. On ouvre le robinet et on suppose pour l'instant qu'un système annexe maintient la hauteur d'eau fixée à h_0.
   En utilisant la relation de Bernoulli dont on vérifiera les conditions d'application, montrer que la vitesse du jet en sortie vaut :
   $$v_0 = \sqrt{2gh_0(t)}$$
2. Partant d'une hauteur h_0, on ouvre le robinet, le niveau d'eau baisse progressivement dans le réservoir, on note $h(t)$ la hauteur d'eau à un instant quelconque.
   Comme $s \ll S$, on supposera que l'écoulement est quasi-stationnaire, la relation de Bernoulli reste alors applicable à chaque instant.
   (a) En exprimant la conservation du débit volumique, montrer que :
   $$S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -sv(t) \text{ avec } v(t) \text{ la vitesse en sortie du réservoir}$$
   (b) En déduire la durée T nécessaire pour vidanger le réservoir.

Réponses : 1 : $v_0 = \sqrt{2gh_0}$; 2b : $T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{S}{s}$

Bilan029. Vase de Tantale (***)

Le dispositif représenté sur le schéma ci-dessous permet d'obtenir périodiquement un débit important à partir d'une source de débit faible.



Le tuyau a une section s faible devant la section S du vase cylindrique. La source a un débit volumique D constant. L'eau est incompressible et on néglige tout phénomène de viscosité.

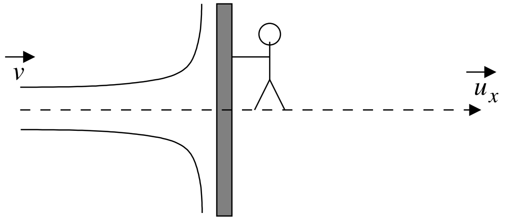
1. Rappeler la relation de Bernoulli et ses conditions d'application.
2. Partant d'un niveau h nul, décrire les phénomènes observés.
3. Montrer que pour un débit D inférieur à une limite D_1 que l'on calculera l'écoulement est périodique.
4. Supposons que $D \ll D_1$. Tracer l'allure du graphe de la fonction $h : t \to h(t)$ et calculer une valeur approchée de sa période.
5. Si on ne fait pas cette hypothèse, calculer la durée de la phase de vidange et la période des oscillations.
   Données : $h_1 = 10$ cm ; $h_2 = 40$ cm ; $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $S = 100\ \mathrm{cm^2}$; $s = 1,0\ \mathrm{cm^2}$; $D = 0,014\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}$.
   $$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}u}{\lambda - \sqrt{u}} = 2\left[\sqrt{a} - 1 + \lambda \ln\left(\frac{\sqrt{a}-\lambda}{1-\lambda}\right)\right] \text{ si } \lambda < 1.$$

Réponses : 3 : $D_1 = s\sqrt{2gh_1}$; 4 : durée de remplissage $t_r = \frac{S}{D}(h_2 - h_1) = 214$ s ;
5 : $t_v = \frac{2Sh_1}{D_1}\left[\sqrt{\frac{h_2}{h_1}} - 1 + \frac{D}{D_1}\ln\left(\frac{\sqrt{h_2/h_1} - D/D_1}{1 - D/D_1}\right)\right]$, $t_v \approx 15$ s

Bilans de quantité de mouvement et d'énergie mécanique

Bilan016. Jet sur une plaque (**)

Un jet d'eau est envoyé sur une plaque. Le jet d'eau possède une vitesse $\vec{v}$ et on note D_m son débit massique. On néglige l'action de la pesanteur.



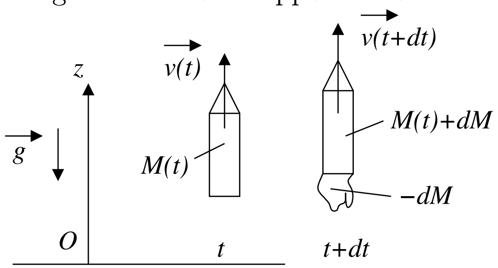
En considérant un système constitué de la plaque et d'une portion de fluide bien choisie, déterminer l'action subie par la personne qui maintient la plaque à l'équilibre.

Réponse : $\vec{F} = D_m\vec{v}$

Bilan015. Propulsion d'une fusée (**)

Dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, on considère le mouvement de translation d'une fusée suivant l'axe (Oz) vertical colinéaire au champ de gravitation $\vec{g}$, supposé uniforme ; on néglige la résistance de l'air.

Au fur et à mesure de son ascension, la fusée éjecte vers l'arrière les gaz produits par réaction chimique entre le carburant et le combustible qu'elle transporte.
Ces gaz sont éjectés avec une vitesse relative u par rapport à la fusée et un débit massique D_m. Ces deux grandeurs sont supposées constantes.



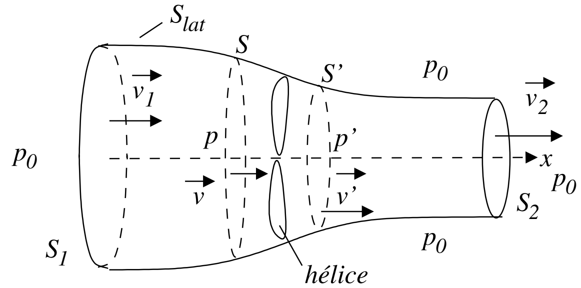
À vide, la masse de la fusée vaut M_0 et la masse initiale du mélange combustible est notée m_0.

1. En considérant le système fermé constitué, à l'instant t, par la fusée et son contenu, effectuer un bilan de quantité de mouvement.
   Montrer que la vitesse de la fusée vérifie l'équation différentielle :
   $$(M_0 + m(t))\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -(M_0 + m(t))g + D_m u$$
   avec $m(t)$ la masse de mélange encore dans la fusée à l'instant t.
2. Montrer que le débit doit dépasser une valeur critique $D_{m,0}$ pour que la fusée puisse décoller.
3. Déterminer l'expression de la vitesse v_f lorsque tout le mélange combustible a été consommé.

Réponses : 2 : $D_m > D_{m,0} = \dfrac{(M_0 + m_0)g}{u}$; 3 : $v_f = -\dfrac{gm_0}{D_m} + u\ln\left(\dfrac{M_0 + m_0}{M_0}\right)$

Bilan009. Propulsion d'un navire (***)

Une hélice animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe Ox est plongée dans un fluide parfait, incompressible de masse volumique μ. L'étude est faite dans le référentiel galiléen R lié à l'axe de l'hélice. Dans ce référentiel, l'écoulement est stationnaire. On néglige l'influence de la pesanteur.



On considère un tube de courant possédant la symétrie de révolution d'axe Ox et s'appuyant sur les pales de l'hélice. Ce tube de courant délimite une surface fermée constituée de la surface latérale S_{lat} et des sections droites en amont et en aval S_1 et S_2. La pression à l'extérieur de ce tube de courant est uniforme et égale à la pression p_0

Sur la surface S_1, la vitesse du fluide est uniforme et égale à $v_1\vec{u}_x$, sur S_2, elle est égale à $v_2\vec{u}_x$ ($v_2 \neq v_1$).
Sur S (S'), la vitesse est $v\vec{u}_x$ ($v'\vec{u}_x$) et la pression p (p'). Au voisinage proche de l'hélice, entre S et S', l'écoulement est perturbé et il existe une discontinuité de pression de part et d'autre de l'hélice.
On note D_m le débit massique du fluide à travers le tube de courant.

1. Quantité de mouvement :
   (a) En appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant en amont, exprimer la pression p en fonction de p_0, μ, v_1 et v. Déterminer

de même p' en fonction de p_0, μ, v_2 et v'.
Comme $S \approx S'$, montrer que $v = v'$.

(b) On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide. En effectuant un bilan de quantité de mouvement avec la surface de contrôle comprise entre S et S', exprimer $\vec{F}$ en fonction de S, μ, v_1 et v_2.

(c) En raisonnant sur une surface de contrôle limitée par les surfaces S_1 et S_2, obtenir une seconde expression de la force $\vec{F}$ en fonction de S, μ, v, v_1 et v_2.

(d) En déduire une relation simple liant v, v_1 et v_2

2. Énergie cinétique :

(a) En appliquant le théorème de la puissance cinétique à un volume de fluide bien choisi, déterminer la puissance $\mathcal{P}$ fournie par l'hélice au fluide. Donner le résultat d'une part en fonction du débit massique D_m, et des vitesses v_1 et v_2, d'autre part en fonction de la force F et de v.

(b) Commenter le signe de $\mathcal{P}$ et justifier l'allure du tube de courant représenté sur le schéma.

Réponses : 1a : $p = p_0 + \frac{\mu}{2}(v_1^2 - v^2)$, $p' = p_0 + \frac{\mu}{2}(v_2^2 - v'^2)$; 1b : $\vec{F} = \frac{S\mu}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)\vec{u}_x$; 1c : $\vec{F} = \mu S v(v_2 - v_1)\vec{u}_x$; 1d : $\frac{v_1 + v_2}{2} = v$; 2a - $\mathcal{P} = \frac{D_m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$, $\mathcal{P} = F \times v$

Bilan030. Rendement d'un ventilateur (**)

Un ventilateur aspirant de l'air libre reçoit d'un moteur la puissance de 27 kW et produit un courant d'air uniforme de vitesse 40 m $\cdot$ s^{-1}, dans un tube cylindrique de diamètre $D = 0,80$ m ouvert à l'air libre.

Question : estimer le rendement de ce ventilateur.

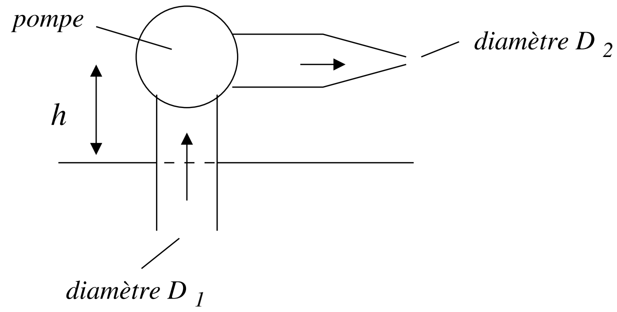
Réponse : $r = \frac{\rho \pi D^2 v^3}{8\mathcal{P}} = 71\%$

Bilans thermodynamiques

Bilan001. Puissance d'une pompe (**).

On pompe de l'eau dans la mer par un tuyau de 15 cm de diamètre et on la décharge à une altitude $h = 3,0$ m à travers un convergent de diamètre de sortie 3,0 cm, avec un débit $Q = 27$ L/s. On estime la perte de charge totale $h_v = 50$ cm.

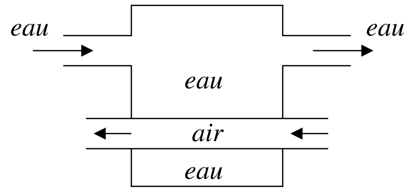
Sachant que la pompe a un rendement de 75%, quelle puissance $\mathcal{P}_m$ doit avoir le moteur de la pompe ?



Réponse : $\mathcal{P}_m = \frac{\rho Q}{\eta}\left[g\left(h + h_v\right) + \frac{8Q^2}{\pi^2 D_2^4}\right] = 27,5$ kW

Bilan011. Échangeur en régime stationnaire (**)

De l'air chaud ($P_1 = 6$ bar, $T_1 = 500$ K) est refroidi de façon isobare jusqu'à la température T_0 de 300 K, dans un échangeur parfaitement calorifugé. Le fluide réfrigérant est constitué par de l'eau de chaleur massique $c = 4,18$ kJ $\cdot$ kg$^{-1}\cdot$ K^{-1} qui entre à la température $\theta_e = 12$°C et qui en sort à la température θ_s.
Le débit d'eau est $d_e = 100$ g $\cdot$ s^{-1} et celui de l'air $d_{air} = 6,5$ g $\cdot$ s^{-1}, la capacité thermique de l'air à pression constante vaut $c_{p,air} = 1,0$ kJ $\cdot$ kg$^{-1}\cdot$ K^{-1}.



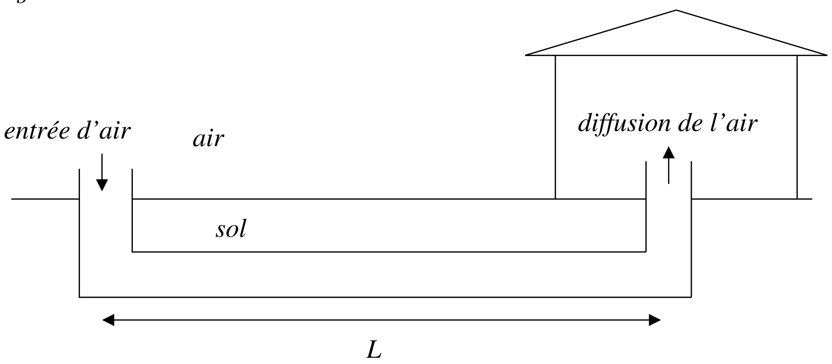
1. En appliquant le premier principe à un système fermé constitué des deux fluides, donner l'expression de θ_s.
2. Application numérique.

Réponses : 1 : $\theta_s = \theta_e + \frac{d_{air}}{d_e}\frac{c_{p,air}}{c_e}\left(T_1 - T_0\right)$; 2 : $\theta_s = 15,1$°C

Bilan035. Puits canadien (**)

1. Exprimer la variation d'enthalpie massique pour un gaz parfait.

Le puits canadien est un système de préchauffage passif de l'air utilisant l'inertie thermique du sol (voir figure). Sous nos latitudes, la température moyenne du sol vaut environ $T_{\text{sol}} = 11$°C *et on suppose que ses variations sont négligeables à la profondeur où est enterré le tuyau (2 m). On se place donc en régime stationnaire. On assimile l'air à un gaz parfait en écoulement incompressible. L'air qui circule dans le tuyau horizontal reçoit de la chaleur* *de la part du sol sous forme conducto-convectif et on peut modéliser par $\delta P_{th} = \alpha \mathrm{d}x(T_{\text{sol}} - T(x))$ la puissance thermique reçue par un élément de longueur $\mathrm{d}x$ d'air.*



2. Quelle est la dimension de α ?

3. En effectuant un bilan d'énergie en régime stationnaire sur un système élémentaire qu'on précisera, montrer que la température de l'air à l'intérieur du tuyau horizontal est solution de l'équation différentielle :
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + \frac{T(x) - T_{\text{sol}}}{\ell_o} = 0$$
où ℓ_o s'exprime en fonction de D_m, débit massique de l'air, c_p capacité thermique massique de l'air et du coefficient α.

4. Résoudre cette équation différentielle. On appelle T_{ext} la température de l'air extérieur.
Quelle est la température maximale que peut atteindre l'air à l'intérieur du tuyau ?

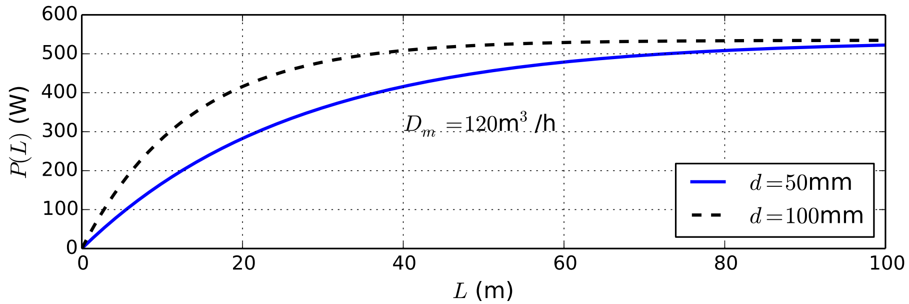
5. En déduire la puissance thermique reçue par l'habitation lorsque l'air a parcouru une longueur L de tuyau.

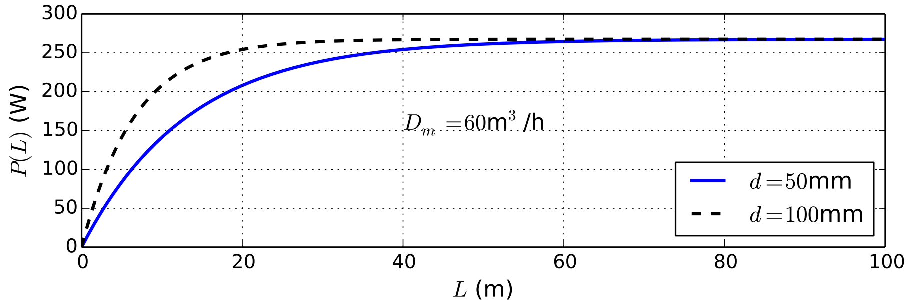
Soit le réseau expérimental de courbes $P_{th}(L)$ donné en annexe obtenu pour une température du sol $T_{sol} = 11°C$ et une température d'entrée de l'air $T_{ext} = -5°C$. d est le diamètre de la gaine du tuyau.

6. Justifier que le palier atteint ne dépend que du débit massique D_m.

7. Comment, à l'aide de ces courbes, accède-t-on à la valeur numérique de ℓ_o ?

8. Comment justifier, pour un débit donné, l'existence d'un réseau de courbes, qui varie en fonction du diamètre d du tuyau ?

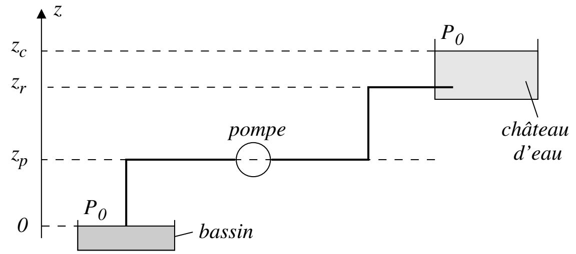




Réponses : 1 : $c_p = \dfrac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$; 3 : $\ell_0 = \dfrac{D_m c_p}{\alpha}$; 4 : $T(x) = T_{\text{sol}} + (T_{\text{ext}} - T_{\text{sol}})\, e^{-x/\ell_0}$; 5 : $P_{th} = D_m c_p \left[T_{\text{sol}} - T_{\text{ext}}\right] \times \left[1 - e^{-L/\ell_0}\right]$

Bilan020. Adduction d'un village (***)

On s'intéresse au réseau d'alimentation en eau potable d'un village. Une pompe aspire de l'eau dans un bassin, dont l'altitude à la surface libre sert d'origine à l'axe Oz ascendant.



La conduite d'aspiration reliant le bassin à la pompe est de longueur $L_a = 20$ m et de diamètre $D = 0,20$ m.
La pompe est à une altitude $z_p = 3,0$ m.
La conduite de refoulement qui emmène l'eau de la pompe au château d'eau est de longueur $L_r = 3,2$ km et de diamètre $D = 0,20$ m. L'arrivée de cette conduite

est à une altitude $z_r = 240$ m. Dans le château d'eau, la surface libre de l'eau est à une altitude 250 m.
La pompe fonctionne avec un débit $D_v = 125\ \mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$.

1. Absence de dissipation :
   Dans un premier temps, on néglige toute perte de charge.
   (a) En appliquant le premier principe industriel, montrer que $\mathcal{P}$, la puissance mécanique de la pompe permettant d'assurer le fonctionnement de l'installation, a pour expression :
   $$\mathcal{P} = \mu D_v g z_c$$
   (b) Expliquer la signification physique de cette formule.
   (c) Application numérique.
2. Pertes de charge régulières
   On rappelle que le coefficient de perte de charge Λ_r est donné par :
   $$\frac{\Delta P}{1/2 \mu U^2} = \Lambda_r \frac{L}{D}$$
   avec ΔP la baisse de pression, U la vitesse débitante, L la longueur de la canalisation et D le diamètre de celle-ci.
   (a) Déterminer le vitesse débitante et le nombre de Reynolds dans les conduites. La loi d'Hagen-Poiseuille est-elle applicable ?
   (b) Déterminer alors Λ_r en vous aidant du document donnant le coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds.
   On précise que les conduites présentent une rugosité absolue $k = 1,0$ mm.
   (c) Exprimer la baisse de pression due à la perte de charge et montrer que, d'un point de vue énergétique, cela est équivalent pour la pompe à élever le fluide sur une hauteur supplémentaire :
   $$\Delta h = \Lambda_r \left(\frac{L_a + L_r}{D} \right) \times \frac{U^2}{2g}$$
   (d) Évaluer alors la nouvelle puissance de la pompe.
3. Pertes de charge singulières
   On tient enfin compte des pertes de charges singulières au niveau des coudes.
   On rappelle que Λ_s le coefficient de perte de charge singulière est défini par :
   $$\frac{\Delta P}{1/2 \mu U^2} = \Lambda_s$$
   avec ΔP la baisse de pression au niveau du coude.
   La conduite d'aspiration possède un coude pour lequel $\Lambda_{s,a} = 4,5$ et la conduite de refoulement possède deux coudes dont le coefficient $\Lambda_{s,r} = 2,25$ pour l'ensemble des deux coudes.
   En déduire la nouvelle expression de la puissance de la pompe. Application numérique.
4. À température ambiante, la pression de vapeur saturante de l'eau a pour valeur $P_{sat} = 2,3$ kPa. Y a-t-il un risque de cavitation, et si oui à quel endroit du dispositif ?

Réponses : 1c : $\mathcal{P} = 85,2$ kW ; 2a : $U = 1,1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\mathcal{R}_e = 2,2 \times 10^5$; 2b : $\Lambda_r \approx 0,03$; 2d : $\mathcal{P} = 95,4$ kW ; 3 : $\mathcal{P} = \mu D_v g\,(z_c + \Delta h + \Delta h_2)$ avec $\Delta h_2 = (\Lambda_{s,a} + \Lambda_{s,r}) \times \dfrac{U^2}{2g}$, $\mathcal{P} = 95,5$ kW

Résolutions de problème

Bilan060. Risque de noyade (***)

Sujet : « on remplit d'eau la pièce dans laquelle on se trouve. Va-t-on se noyer ? »

Démarche proposée :
— en supposant que l'eau ne peut sortir autrement, discuter de la possibilité d'ouvrir la porte ;
— puis, en considérant une fuite d'eau sous la porte, déterminer la durée nécessaire pour que le niveau diminue suffisamment pour pouvoir respirer ;
— discuter alors qualitativement ce qu'il se passe si on réduit la taille de l'ouverture et l'influence sur la durée précédemment trouvée.

Bilan062. Effet de sol (**)

Pour un bolide type « Formule 1 », la garde au sol basse permet de générer un effet de sol qui plaque le véhicule au sol et améliore l'adhérence des pneumatiques.

Question : estimer l'ordre de grandeur de cet effet de sol.