TD05 : fluides en écoulement (correction)

PhTr080. Débit et écoulement visqueux (*)

1. Le débit volumique D_v est égal au flux du vecteur vitesse à travers la section droite de la plaque :
$$D_v = \int_{x=-a}^{a}\int_{y=-L}^{L} v_0\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = v_0\times 2L\times\int_{x=-a}^{a}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$
$$D_v = v_0\times 2L\times\int_{x=-a}^{a}\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \boxed{D_v=\frac{8}{3}v_0La}$$
2. La vitesse moyenne est le rapport du débit volumique par la section :
$$U=\frac{D_v}{2L\times 2a}\quad\Rightarrow\quad\boxed{U=\frac{2v_0}{3}}$$

PhTr054. Perfusion (**)

1. $D_v = 0,500/3600 \quad\Rightarrow\quad \boxed{D_v = 1,39\times 10^{-4}\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}}$
2. On commence par estimer le nombre de Reynolds :
$$R_e=\frac{\rho DU}{\eta}=\frac{\rho\times 2r}{\eta}\frac{D_v}{\pi r^2}=\frac{2\rho D_v}{\pi\eta r}\quad\Rightarrow\quad R_e=\frac{2\times 1,03\times 10^3\times 1,39\times 10^{-7}}{\pi\times 1,4\times 10^{-3}\times 2\times 10^{-4}}$$
$R_e\approx 3,2\times 10^2$. On peut considérer que le régime est laminaire et appliquer la relation d'Hagen-Poiseuille pour déterminer la résistance hydraulique :
$$R_{hyd}=\frac{8\eta l}{\pi r^4}=\frac{8\times 1,4\times 10^{-3}\times 3,0\times 10^{-2}}{\pi\times(2,0\times 10^{-4})^4}\quad\Rightarrow\quad\boxed{R_{hyd}=6,7\times 10^{10}\ \mathrm{Pa\cdot s\cdot m^{-3}}}$$
Ce qui donne pour la perte de charge :
$$\Delta P = R_{hyd}\times D_v = 6,68\times 10^{10}\times 1,39\times 10^{-7}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\Delta P = 9,3\times 10^3\ \mathrm{Pa}}$$
3. En entrée de la seringue la pression vaut : $P_e = P_0+\rho gh$ avec h la hauteur à laquelle on fixe le flacon. En sortie de la seringue la pression vaut : $P_s = P_0+P_v$. Pour que l'écoulement puisse avoir lieu, il faut que la différence de pression entre l'entrée et la sortie soit au moins égale à la perte de charge. À la limite :
$$\Delta P = P_e-P_s=\rho g h_{lim}-P_v\quad\Leftrightarrow\quad\boxed{h_{lim}=\frac{\Delta P+P_v}{\rho g}}$$
Application numérique :
$$h_{lim}=\frac{9,3\times 10^3+1013\times 10^2\times(4/760)}{1,03\times 10^3\times 9,81}\quad\Rightarrow\quad\boxed{h_{lim}=0,97\ \mathrm{m}}$$

PhTr068. Perte régulière horizontale (**)

Pour utiliser le diagramme donnant la perte de charge, il nous faut déterminer le nombre de Reynolds de l'écoulement et la rugosité relative de la conduite :
$$\mathcal{R}_e=\frac{\mu Ud}{\eta}=\frac{Ud}{\nu}=\frac{Q_v}{S}\times\frac{d}{\nu}=\frac{Q_v}{\pi d^2/4}\times\frac{d}{\nu}=\frac{4Q_v}{\pi d\nu}=\frac{4\times 0,120}{\pi\times 0,2\times 9,0\times 10^{-6}}$$
On obtient $\mathcal{R}_e = 8,5\times 10^4$.

Pour la rugosité relative, on obtient $k=\dfrac{\varepsilon}{d}=\dfrac{0,25}{200}=1,25\times 10^{-3}$.

En utilisant le diagramme fourni, le coefficient de perte de charge peut, pour cette expérience, être approximé par $\Lambda\approx 0,023$.

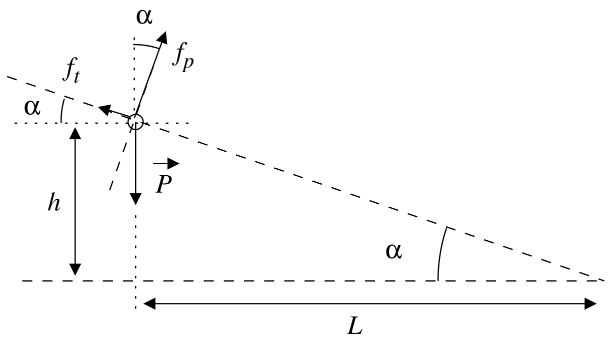
On repart alors de sa définition pour déterminer la perte de charge :
$$\Delta P=\mu g\Delta h=\Lambda\frac{L}{d}\times\frac{1}{2}\mu U^2\quad\Leftrightarrow\quad\Delta h=\frac{\Lambda\times L\times U^2}{2dg}$$
Application numérique :
$$\Delta h=\frac{0,023\times 300\times\left[0,120/(\pi\times 0,2^2/4)\right]^2}{2\times 0,2\times 9,81}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\Delta h\approx 26\ \mathrm{m}}$$

PhTr066. Décollage d'un Airbus A380 (**)

1. À la limite, au décollage, la portance doit équilibrer le poids ce qui impose :
$$f_p=C_z\times\frac{1}{2}\rho v^2S=mg\quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{2mg}{C_z\rho S}}$$
Application numérique :
$$v=\sqrt{\frac{2\times 421\times 10^3\times 9,81}{1,38\times 1,2\times 845}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{v=77\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=276\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}}$$
Remarque : on peut retrouver la masse volumique de l'air en utilisant la relation des gaz parfaits pour l'air de masse molaire $M = 29\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.
2. Influence de l'altitude : avec l'altitude la masse volumique décroît et la vitesse doit augmenter, la portance se faisant plus faible ; en considérant la variation modeste, on peut effectuer un calcul différentiel (différentielle logarithmique) :
$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$
Dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme, $\rho(z)=\rho_0\exp(-z/H)$ avec $H=RT/(Mg)$, c'est à dire :
$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\frac{1}{2}\times\frac{-\mathrm{d}z}{H}\quad\Rightarrow\quad\frac{\Delta v}{v}=\frac{Mg\Delta z}{2RT}$$

Application numérique :
$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{29 \times 10^{-3} \times 9,81 \times 2250}{2 \times 8,31 \times 293} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta v}{v} = +13\%}$$
Influence de la température : à pression constante, la différentielle logarithmique de la formule des gaz parfaits conduit à :
$$P = \frac{\rho RT}{M} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}T}{T}$$
Application numérique :
$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{20}{2 \times 293} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta v}{v} = +3,4\%}$$
Il est plus difficile pour un avion de décoller en altitude et en été.

3. Dans cette situation, les moteurs étant coupés, il n'y a plus de force de poussée :



En régime inertiel, les forces se compensent. En projection sur l'axe horizontal :
$$f_t \cos(\alpha) = f_p \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha) = \frac{f_t}{f_p} = \frac{C_x}{C_z} = \frac{1}{f}$$
Sachant que $\tan(\alpha) = \dfrac{h}{L}$, on obtient : $\boxed{f = \dfrac{L}{h}}$.

PhTr079. Traînée sur une balle de tennis

On commence par évaluer le nombre de Reynolds associé à l'écoulement :
$$R_e = \frac{\rho \times V \times 2R}{\eta} = \frac{1,23 \times (200/3,6) \times 2 \times 3,3 \times 10^{-2}}{15 \times 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad R_e = 3,0 \times 10^5$$
On applique donc la formule de White :
$$C_X = \frac{24}{3,0 \times 10^5} + \frac{6}{1 + \sqrt{3,0 \times 10^5}} + 0,4 \quad \Rightarrow \quad C_X = 0,41$$
On peut alors évaluer la traînée :
$$f_t = \frac{1}{2} C_X \rho_{air} V^2 \times \pi r^2 = \frac{1}{2} \times 0,41 \times 1,23 \times \left(\frac{200}{3,6}\right)^2 \times \pi \times (3,3 \times 10^{-2})^2$$
C'est à dire $\boxed{f_t = 2,7 \text{ N}}$, cette force influe fortement sur le mouvement du corps car elle est supérieure en valeur absolue au poids de la balle $P \approx 0,6$ N.

PhTr060. Chute d'une bille, loi de Stokes (**)

1. On constate que la distance parcourue est proportionnelle au temps écoulé, la vitesse est donc constante ; à l'aide d'une régression linéaire, ou, à défaut, en utilisant les données extrêmes du tableau, on obtient :
$$\boxed{v = 3,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}}$$
2. En choisissant $\eta \approx 1$ Pℓ :
$$\mathcal{R}_e = \frac{\mu_g v d}{\eta} = \frac{1260 \times 3,5 \times 10^{-2} \times 0,0216}{1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{R}_e \approx 1}$$
3. La bille de caoutchouc est soumise à son poids, à la poussé d'Archimède et à la force de traînée que l'on peut modéliser par la loi de Stokes compte tenu de la valeur du nombre de Reynolds.
On applique alors la deuxième loi de Newton à la bille dans le référentiel galiléen du laboratoire.
$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} - \mu_g \times \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v}}$$
4. En régime inertiel, les forces se compensent, en appelant μ_c la masse volumique du caoutchouc, on en déduit :
$$\frac{4\pi R^3}{3}(\mu_c - \mu_g)\, g = 6\pi\eta R v \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{2R^2 g}{9\eta}(\mu_c - \mu_g)}$$
On en déduit alors la viscosité de la glycérine à l'aide de la mesure de la vitesse (avec $\mu_c = 1421$ kg $\cdot$ m^{-3}) :
$$\eta = \frac{2R^2 g\,(\mu_c - \mu_g)}{9v} = \frac{2 \times (0,0216/2)^2 \times 9,81 \times (1421 - 1260)}{9 \times 3,5 \times 10^{-2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta \approx 1,2 \text{ P}\ell}$$

PhTr069. Champ de pression dans l'atmosphère non isotherme (**)

1. Partant de la relation affine entre altitude et température, on détermine la constante a :
$$\boxed{a = \left(\frac{T_0 - T(z_1)}{T_0}\right) / z_1 = 2,3 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}}$$
2. Les trois équations à utiliser sont :
   ⋆ l'équation d'état du gaz supposé parfait : $p = \dfrac{\rho RT}{M}$

$\star$ l'équation de la statique des fluides : $-\rho g = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$
$\star$ la loi d'évolution de la température : $T(z) = T_0(1 - az)$
On combine ces trois relations pour obtenir une équation différentielle liant la pression à l'altitude :

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{RT}\mathrm{d}z = -\frac{Mg}{RT_0}\left(\frac{1}{1-az}\right)\mathrm{d}z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}z}{1-az}}$$

3. On intègre cette équation l'altitude variant de 0 à z et la pression de p_0 à $p(z)$:

$$\ln\frac{p(z)}{p_0} = \frac{1}{Ha}\ln(1-az) \quad \text{soit} \quad \boxed{p(z) = p_0 e^{\left(\frac{1}{Ha}\ln(1-az)\right)}}$$

4. Au sommet de l'Everest $\boxed{p_1 = 0,32 \text{ atm}}$

PhTr076. Submersible (**)

1. À l'équilibre le poids et la poussée d'Archimède se compensent :

$$Mg = \rho a^2(a-h)g \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{h = a - \frac{M}{\rho a^2}}$$

Pour que le cube flotte :

$$h \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - \frac{M}{\rho a^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{M \leq \rho a^3}$$

Le cube flotte si sa masse est inférieure à la masse maximale du volume d'eau déplacé pour un cube totalement immergé.

2. Pour la suite, on néglige la masse de l'air vis à vis de la masse du matériau constituant le cube.
Le volume du matériau correspond à la différence de volume entre deux cubes de rayon a et $a - 2e$, c'est à dire :

$$V_{\text{mat}} = a^3 - (a-2e)^3 = a^3\left[1 - \left(1 - \frac{2e}{a}\right)^3\right] \approx a^3 \times \frac{3 \times 2e}{a} = 6a^2e$$

C'est à dire $\boxed{M = \rho_s \times 6a^2 e}$.

On peut aussi obtenir ce résultat en considérant 6 faces d'aire a^2 et d'épaisseur e, les intersections étant des termes en e^2.

3. Le poids est alors supérieur à la poussée d'Archimède, **le cube coule**. La résultante des forces restant identique au cours du mouvement, le corps continuera sa descente.

4. Influence de la compressibilité :

(a) La poussée d'Archimède devant compenser le poids, la masse volumique doit augmenter avec la profondeur, l'axe Oz étant orienté vers le haut ($z < 0$ dans l'eau), cela impose $\boxed{\alpha < 0}$, de plus $[\alpha] = \mathrm{L}^{-1}$.
Pour la cote z_e d'équilibre, la poussée d'Archimède équilibre le poids :

$$(m+M)g = \rho_0(1+\alpha z_e)a^3 g$$

Avec l'expression proposée pour $(m+M)$ on en déduit ;

$$(1+k)\rho_0 a^3 = \rho_0 a^3(1+\alpha z_e) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z_e = k/\alpha}$$

Application numérique : $z_e = -1$ km.

(b) **L'équilibre est stable**. Partant de z_e, supposons que le submersible remonte légèrement, alors la masse volumique de l'eau diminue ainsi que la poussée d'Archimède et le cube redescend. Supposons que le submersible descende légèrement, alors la masse volumique de l'eau augmente ainsi que la poussée d'Archimède et le cube remonte.

On applique la relation fondamentale de la dynamique au cube. On pose $z = z_e + \varepsilon$ et on utilise la condition d'équilibre :

$$(m+M)\ddot{z} = -(M+m)g + \rho_0\left[1 + \alpha(z_e + \varepsilon)\right]a^3 g = +\rho_0 a^3 \times \alpha g \times \varepsilon$$

Avec $(m+M) = \rho_0 a^3(1+k)$ et $\ddot{z} = \ddot{\varepsilon}$, on en déduit :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{|\alpha|\,g}{1+k}\varepsilon = 0$$

L'équation est bien celle d'un oscillateur harmonique (système stable) et la période propre des oscillations vaut :

$$\omega_0^2 = \frac{|\alpha|\,g}{1+k} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{T_0 = 2\pi \times \sqrt{\frac{1+k}{|\alpha|\,g}} \approx 2,0 \times 10^3 \text{ s}}$$

PhTr055. Sténose

1. $R_e = \dfrac{\rho \times v \times 2r_0}{\eta} = \dfrac{10^3 \times 10^{-3} \times 2 \times 7 \times 10^{-3}}{6,0 \times 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_e = 2,3}$.
Le régime est laminaire et la loi d'Hagen-Poiseuille peut être appliquée.

2. D'après la loi d'Hagen-Poiseuille : $D_v = \dfrac{\pi r_0^4}{8\eta L}\Delta P$, c'est à dire pour la résistance hydraulique :

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r_0^4} = \frac{8 \times 6,0 \times 10^{-3} \times 7,0 \times 10^{-2}}{\pi \times (7,0 \times 10^{-3})^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 4,5 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}}$$

Et donc pour la perte de charge :
$\Delta P = R \times D_v = R \times v \times \pi \times r_0^2 = 4,5 \times 10^5 \times 10^{-3} \times \pi \times (7,0 \times 10^{-3})^4$

$\boxed{\Delta P = 6,9 \times 10^{-2} \text{ Pa}}$.

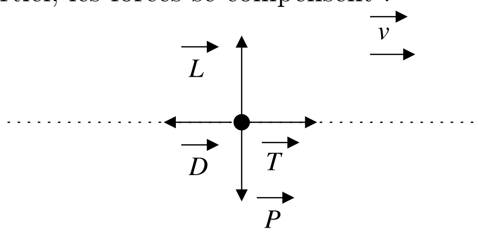
3. $R_1 = R_3 = \dfrac{8\eta \times (\ell/3)}{\pi r_0^4} \quad \Rightarrow \quad R_1 = R_3 = R/3$ et $R_2 = \dfrac{8\eta \times (\ell/3)}{\pi (r_0/2)^4} = \dfrac{16R}{3}$, ce qui donne pour la résistance totale :
$$R' = 2 \times \frac{R}{3} + \frac{16R}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R' = 6R}$$
La résistance étant multipliée par 6, le débit volumique est divisé par 6, $Q' = Q/6$.

4. Il s'agit de retrouver la résistance hydraulique initiale, la résistance R_2 du pontage étant en parallèle avec l'artère, on veut donc :
$$\frac{R'R_2}{R' + R_2} = \frac{6RR_2}{6R + R_2} = R \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{R_2 = \frac{6R}{5}}$$
Cette égalité impose :
$$\frac{8\eta\ell}{\pi r_2^4} = \frac{6}{5} \times \frac{8\eta\ell}{\pi r_0^4} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r_2 = \sqrt[4]{\frac{5}{6}} r_0 = 0,67 \text{ cm}}$$

PhTr078. Avion solaire autonome (**)

Première partie : puissance et masse de l'avion

1. Pour un vol inertiel, les forces se compensent :



Ceci impose :
$$\boxed{T = D} \quad \text{et} \quad \boxed{P = L}$$

2. La puissance motrice est par définition le produit scalaire de la force de poussée par le vecteur vitesse :
$$\mathcal{P} = \vec{T}.\vec{V} = T \times V$$
Les relations précédemment établies conduisent aux égalités :
$$T = \frac{1}{2}\rho S C_D V^2 \quad \text{et} \quad Mg = \frac{1}{2}\rho S C_L V^2$$
On en déduit :
$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\rho S C_D V^3 = \frac{1}{2}\rho S C_D \times \frac{2^{3/2} M^{3/2} g^{3/2}}{\rho^{3/2} S^{3/2} C_L^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{2g^3}{\rho C_L}} \frac{M^{3/2}}{S^{1/2}}}$$

3. La puissance motrice à fournir augmente quand la masse volumique diminue, il est donc plus difficile de voler en haute altitude.
Toutes choses égales par ailleurs (masse, surface, finesse), la rapport des puissances à fournir sur Terre et sur Mars vaut :
$$\frac{\mathcal{P}_M}{\mathcal{P}_T} = \sqrt{\frac{g_M^3}{g_T^3}\frac{\rho_T}{\rho_M}} = \sqrt{\frac{3,7^3}{9,8^3} \times \frac{1,2}{0,015}} = 2,1$$
Il est plus difficile de faire voler un avion sur Mars que sur la Terre.

4. Application numérique :
— *Solar Impulse* sur Terre :
$$\mathcal{P} = \frac{1}{50}\sqrt{\frac{2 \times 9,8^3}{1,2 \times 0,60}} \times \frac{1600^{3/2}}{200^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P} = 4,6 \text{ kW}}$$
— *Sky Sailor* sur Mars :
$$\mathcal{P} = \frac{1}{61,5}\sqrt{\frac{2 \times 3,7^3}{1,2 \times 0,80}} \times \frac{2,6^{3/2}}{0,8^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P} = 0,78 \text{ W}}$$

5. D'après le bilan de forces, le rapport du poids sur la force motrice vaut :
$$\frac{P}{T} = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = f \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P}{f}$$
L'énergie fournie par la force motrice est le produit de la force par la distance :
$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{P \times d}{f}}$$
L'énergie à fournir est d'autant plus faible que la finesse est grande.

Seconde partie : lien entre puissance et surface des ailes

1. La puissance moyenne est définie par $I_m = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} I(t)\mathrm{d}t$ avec $T = 24$ h.
La courbe proposée peut être assimilée à une fonction sinusoïdale d'amplitude I_{max} et de période $2T_{day}$ sur sa partie positive et nulle ailleurs. En choisissant l'aube pour l'origine des temps, on obtient :
$$I_m = \frac{1}{T}\int_0^{T_{day}} I_{max} \sin\left(\frac{2\pi t}{2T_{day}}\right)\mathrm{d}t = \frac{I_{max}}{T} \times \frac{-T_{day}}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi t}{T_{day}}\right)\right]_0^{T_{day}}$$

$$I_m = \frac{I_{max}T_{day}}{T} \times \frac{2}{\pi} = \frac{950 \times 14,5}{24} \times \frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_m = 3,7 \times 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}$$

2. La masse de l'avion est proportionnelle au cube de la taille caractéristique, sa surface au carré de cette même grandeur. D'après la formule obtenue pour la puissance motrice, on en déduit :

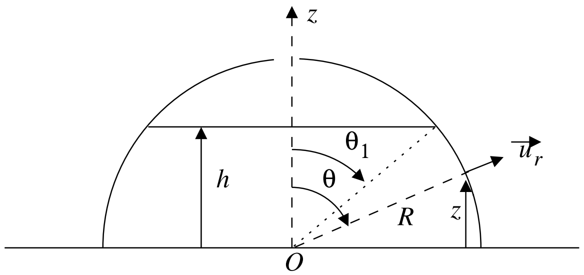
$$\mathcal{P} \propto \frac{\left(L^3\right)^{3/2}}{\left(L^2\right)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P} \propto L^{7/2}}$$

La puissance solaire est proportionnelle à la surface de l'avion et varie donc comme L^2.

Comme $7/2 = 3,5 > 2$, il est plus facile de faire voler un avion solaire de petite taille.

Le raisonnement a été effectué pour une forme assez symétrique, la solution passe par construire un avion avec des ailes particulièrement étendues comme sur l'exemple d'un planeur.

PhTr094. Soulèvement d'un bol (***)



Idée physique :

La présence d'eau au sein du bol va créer une surpression dont la résultante dirigée vers le haut va contribuer à soulever le bol.

Mise en équation :

— **champ de pression au sein de l'eau** :
On considère une hauteur d'eau h dans le bol. Avec un axe vertical orienté vers le haut, pour un fluide incompressible de masse volumique ρ :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad p(z) = -\rho g z + cste$$

Avec $p(h) = p_0 = -\rho g h + cste$ donc $\boxed{p(z) = p_0 + \rho g(h-z)}$.

Pour la suite, on ne considérera que la surpression, les effets de la pression atmosphérique se compensant sur les deux faces intérieure et extérieure.

— **résultante des forces de pression** :
Sur un élément de surface d'aire $\mathrm{d}S$, il s'exerce une force élémentaire :

$$\delta\vec{F}_p = \rho g(h-z)\mathrm{d}S\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \delta F_{p,z} = \rho g(h-z)\mathrm{d}S\vec{u}_r.\vec{u}_z = \rho g(h-z)\mathrm{d}S\cos(\theta)$$

Par symétrie, la résultante des forces de pression est dirigée selon la verticale et on ne s'intéresse pour la suite qu'à cette unique composante.

Il reste maintenant à intégrer sur l'ensemble de la surface du bol en contact avec l'eau. On a, en particulier, $z = R\cos(\theta)$ et $h = R\cos(\theta_1)$.

$$F_{p,z} = \int_{\theta_1}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho g(h-z)\cos(\theta)R^2\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad F_{p,z} = 2\pi\rho g R^2 \int_{\theta_1}^{\pi/2} [h - R\cos(\theta)]\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad F_{p,z} = 2\pi\rho g R^2 \left[-\frac{h\cos^2(\theta)}{2} + \frac{R\cos^3(\theta)}{3}\right]_{\theta_1}^{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad F_{p,z} = 2\pi\rho g R^2 \left[\frac{h}{2}\cos^2(\theta_1) - \frac{R}{3}\cos^3(\theta_1)\right]$$

Avec $\cos(\theta_1) = h/R$, on en déduit :

$$\boxed{F_{p,z} = \frac{\pi\rho g h^3}{3}}$$

Condition de soulèvement :

À la limite de soulèvement du bol, la force de surpression égalise le poids et la réaction du support s'annule :

$$\frac{\pi\rho g H_c^3}{3} = mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_c = \sqrt[3]{\frac{3m}{\pi\rho}}}$$

Une contrainte supplémentaire est bien évidemment $H_c < R$.