TD05 : fluides en écoulement

Si nécessaire, on se reportera au diagramme donnant le coefficient de perte de charge « Friction Factor » dans une conduite cylindrique en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs de la rugosité relative.
ε, grandeur homogène à une longueur, représente la rugosité absolue moyenne (typiquement la taille des aspérités de la conduite) ; ε/D représente la rugosité relative, c'est à dire la rugosité comparée au diamètre de la conduite.

Écoulements dans une conduite

PhTr080. Débit et écoulement visqueux (*)

On considère une plaque parallélépipédique d'épaisseur $2a$ selon Ox, de largeur $2L$ selon Oy. Le fluide visqueux s'écoule selon la direction Oz. Comme $L \gg a$, on ne tient compte de la viscosité que selon la direction Ox et le champ des vitesses est donné par :

$$\vec{v} = v_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad v_0 > 0$$

1. Déterminer l'expression du débit volumique D_v à travers une section droite de la plaque.
2. Définir et exprimer U la vitesse moyenne, ou vitesse débitante de l'écoulement.

Réponses : 1 : $D_v = \frac{8}{3} v_0 L a$; 2 : $U = \frac{2v_0}{3}$.

PhTr054. Perfusion (**)

On veut perfuser un patient en 60 min avec un flacon de 500 mL de plasma de densité $d = 1,03$ et de viscosité $\eta = 1,4$ cP. L'aiguille utilisée a une longueur $l = 3,0$ cm et un rayon intérieur $r = 0,20$ mm.
Pour un régime d'écoulement laminaire, on rappelle que la perte de charge et le débit sont liés par :

$$\Delta P = \frac{8\eta l}{\pi r^4} \times D_v$$

1. Quel est le débit d'écoulement du plasma ?
2. Calculer la résistance hydraulique de l'aiguille et en déduire la perte de charge ?
3. La pression veineuse du patient P_v, surpression par rapport à la pression atmosphérique, étant de 4,0 mm de mercure, à quelle hauteur minimale doit-on placer le flacon ?

Données : la pression atmosphérique correspond à 760 mm d'une colonne de mercure, la centipoise : 1000 cP=1,0 Pl.

Réponses : 1 : $D_v = 1,39 \times 10^{-4}$ L $\cdot$ s^{-1} ; 2 : $R_{hyd} = 6,7 \times 10^{10}$ Pa $\cdot$ s $\cdot$ m^{-3}, $\Delta P = 9,3 \times 10^3$ Pa ; 3 : $h_{lim} = \frac{\Delta P + P_v}{\rho g} = 0,97$ m

PhTr068. Perte régulière horizontale (**)

Déterminer la perte de charge régulière due à l'écoulement d'une huile de viscosité cinématique $\nu = 9,0 \times 10^{-6}$ m$^2 \cdot$ s^{-1} dans un tuyau de rugosité $\varepsilon = 0,25$ mm et de diamètre 200 mm.
On donne la longueur du tuyau, $L = 300$ m et, pour le débit volumique, $Q_V = 120$ L $\cdot$ s^{-1}.

Réponse : $\Delta h \simeq 26$ m

Portance, traînée

PhTr066. Décollage d'un Airbus A380 (**)

On considère un Airbus A380 au décollage. On rappelle que les coefficients de traînée et de portance sont liés à la traînée et à la portance selon :

$$C_x = \frac{f_t}{1/2 \rho v^2 S} \quad \text{et} \quad C_z = \frac{f_p}{1/2 \rho v^2 S},$$

avec ρ la masse volumique de l'air, v la vitesse de l'avion et S la surface portante.

1. Calculer sa vitesse au décollage au niveau de la mer, à une température de 20°C, pour une masse de 421 tonnes, une surface portante de 845 m^2 et un coefficient de portance $C_z = 1,38$.
2. Calculer la variation relative de cette vitesse due à une variation d'altitude de +2250 m (décollage à l'altitude de Mexico).
Calculer la variation relative de cette vitesse due à une variation de température de +20°C (décollage en été). Commenter.
3. La finesse de l'avion est le rapport du coefficient de portance sur celui de traînée. Sa valeur maximale est de 22 pour l'A380.
Montrer que c'est le rapport de la distance horizontale parcourue sur la perte d'altitude lors d'un vol « plané » (moteurs coupés).
On supposera un mouvement inertiel et on commencera par réaliser un schéma des forces et de la situation.

Réponses : 1 : $v = 77$ m · s^{-1} ; 2 : altitude $\dfrac{\Delta v}{v} = +13\%$, température $\dfrac{\Delta v}{v} = +3,4\%$.

PhTr079. Traînée sur une balle de tennis

Calculer la force de traînée s'exerçant sur une balle de tennis allant à la vitesse $V = 200$ km · h^{-1}, de rayon $R = 3,3$ cm, de masse $m = 58$ g. Commentaire.

Données :
— viscosité : $\eta_{air} = 15 \times 10^{-6}$ Pa · s, masse volumique : $\rho_{air} = 1,23$ kg · m^{-3} ;
— formules donnant le coefficient de traînée C_X en fonction du nombre de Reynolds R_e :
  — $0 < R_e \ll 1$: $C_X = 24/R_e$, formule de Stokes,
  — $R_e < 5$: $C_X = \dfrac{24}{R_e}\left(1 + \dfrac{3}{16}R_e\right)$, formule de Oseen-Lamb,
  — $5 < R_e < 800$: $C_X = \dfrac{24}{R_e}\left(1 + 0,15R_e^{0,687}\right)$, formule de Schiller-Naumann,
  — $800 < R_e < 4 \times 10^5$: $C_X = \dfrac{24}{R_e} + \dfrac{6}{1+\sqrt{R_e}} + 0,40$, formule de White.

Réponse : $f_t = 2,7$ N.

PhTr060. Chute d'une bille, loi de Stokes (**)

On s'intéresse à la chute d'une bille dans la glycérine. La bille est une bille en caoutchouc de masse $m = 7,5$ g, de diamètre $d = 21,6$ mm. La masse volumique de la glycérine vaut $\mu_g = 1260$ kg · m^{-3}.
On considère un axe Oz orienté vers le bas.

1. Une fois le régime inertiel atteint, un relevé des positions au cours du temps donne le résultat suivant :

t(s)	0	0,30	0,50	1,0	2,0	3,0
z(cm)	0	1,14	1,75	3,5	7,1	10,6

   Déterminer la vitesse de la bille.

2. En supposant que la glycérine a une viscosité dynamique comparable à celle de l'huile, donner une estimation du nombre de Reynolds.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la bille. On choisira une expression de la force de traînée compatible avec le nombre de Reynolds postulé.

4. En se plaçant en régime permanent, montrer que la vitesse limite de la bille a pour expression :
$$v = \frac{2R^2 g}{9\eta}(\mu_c - \mu_g)$$
   avec R le rayon de la bille et μ_c la masse volumique du caoutchouc.

   En déduire la valeur de la viscosité de la glycérine.

Réponses : 1 : $v = 3,5$ cm/s ; 2 : $\mathcal{R}_e \simeq 1$, ; 3 : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \mu_g \times \dfrac{4}{3}\pi R^3 \vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v}$; 4 : $\eta \simeq 1,2$ Pl

Statique des fluides

PhTr069. Champ de pression dans l'atmosphère non isotherme (**)

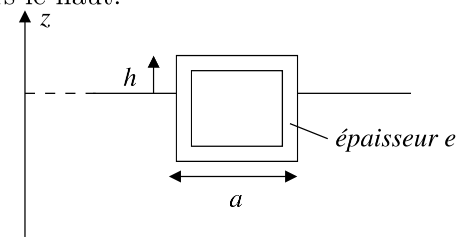
On considère un modèle d'atmosphère dans lequel l'air, assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g · mol^{-1} est au repos dans le champ de pesanteur uniforme g, sa température T décroît avec l'altitude z suivant une relation affine du type :
$$T(z) = T_0(1 - az)$$
avec $T_0 = 293$ K la température à l'altitude $z = 0$ au niveau de la mer et a une constante positive.

1. Au sommet de l'Everest ($z_1 = 8807$ m) la température est $t_1 = -40$°C, calculer la constante a.
2. En utilisant l'équation de la statique des fluides, établir l'équation différentielle vérifiée par la pression p en fonction de l'altitude z. On pose $H = RT_0/(Mg)$.
3. En déduire $p(z)$ en fonction de $p_0 = 1$ atm au niveau de la mer, H et a.
4. En déduire la pression p_1 au sommet de l'Everest.

Réponses : 1 : $a = 2,3 \times 10^{-5}$ m^{-1} ; 2 : $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{1}{H}\dfrac{dz}{1-az}$, ; 3 : $p(z) = p_0 e^{\left(\frac{1}{Ha}\ln(1-az)\right)}$; 4 : $p_1 = 0,32$ atm

PhTr076. Submersible (**)

On s'intéresse à l'immersion d'une boîte cubique de côté a dans de l'eau. Le cube, rigide et creux, est rempli d'air à la pression atmosphérique P_0. Chaque face du cube a une épaisseur fixe e et on notera ρ_s la densité du matériau constituant le cube et M sa masse. Sauf mention contraire, la densité de l'eau ρ est supposée constante et on fait l'hypothèse que l'eau est un fluide parfait. L'axe Oz est pris vertical et orienté vers le haut.



En déposant le cube dans l'eau, une face parallèle à la surface de l'eau, on constate qu'à l'équilibre sa face supérieure se trouve à une distance h au-dessus de la surface de l'eau de cote $z = 0$.

1. À l'équilibre, exprimer la hauteur émergée h en fonction de M, ρ et a. À quelle condition le cube flottera-t-il ?
2. Sachant que $e \ll a$, exprimer la masse M du cube en fonction de a, e et ρ_s. Quelle est alors la condition sur a pour que le cube flotte ?
3. On suppose que le cube flotte à l'équilibre avec une hauteur émergée $h = 0$. On lui rajoute une masse m qui n'augmente pas son volume (par exemple en le remplissant d'eau). Que va-t-il alors se passer ? Le mouvement du cube pourra-t-il s'arrêter ?
4. Au cours du mouvement du cube, on prend maintenant en compte la variation de la densité de l'eau avec la profondeur, $\rho(z) = \rho_0(1 + \alpha z)$ avec $\rho_0 = 1,0 \times 10^3$ kg.m^{-3}.
   (a) Quel doit être le signe de α pour que le cube s'arrête ? Quelle est sa dimension ? Sachant que $m + M = (1 + k)\rho_0 a^3$ (k nombre sans dimension) exprimer la cote z_e où les forces sur le cube s'équilibreront. Faire l'application numérique pour $|\alpha| = 10^{-6}$ SI et $k = 10^{-3}$.
   (b) Cet équilibre est-il stable ? Si oui, déterminer la période propre des oscillations autour de la position d'équilibre.

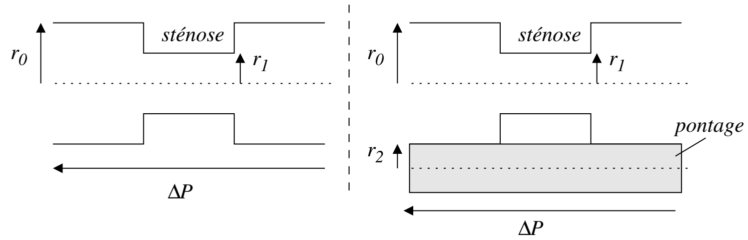
Réponses : 1 : $h = a - \dfrac{M}{\rho a^2}$, $M \leq \rho a^3$; 2 : $M = \rho_s \times 6a^2 e$; 3 : le cube coule ; 4a : $z_e = k/\alpha$; 4b : $T_0 = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{1+k}{|\alpha|\, g}} \simeq 2,0 \times 10^3$ s

Pour aller plus loin

PhTr055. Sténose (**)

On étudie la circulation du sang dans une artère moyenne saine modélisée par un tronçon cylindrique de longueur $l = 7,0$ cm et de rayon $r_0 = 0,70$ cm constant parcouru par le sang avec une vitesse débitante $v = 0,10$ cm $\cdot$ s^{-1}. Le sang a pour viscosité dynamique $\eta = 6,0 \times 10^{-3}$ Pl et pour une masse volumique $\rho = 1,0 \times 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}.

1. Déterminer le nombre de Reynolds dans le vaisseau sanguin. Conclure.
2. Déterminer la résistance hydraulique R de ce vaisseau. En déduire la perte de charge ΔP le long du vaisseau. Dans toute la suite, cette différence de pression sera supposée constante.
3. Le tiers de ce vaisseau est le siège d'une sténose. Dans cette portion centrale, le rayon intermédiaire $r_1 = r_0/2$ est plus petit que le rayon r_0 du vaisseau non altéré.
   Le tronçon de longueur l est partagé en trois portions d'égale longueur de résistances hydrauliques R_1, R_2 et R_3.



   Déterminer la nouvelle résistance thermique de l'artère. Comparer le débit volumique dans l'artère présentant une sténose (Q') à celui d'une artère saine (Q). Conclure.
4. Un pontage est réalisé afin de réparer l'artère sclérosée. Le pontage consiste à contourner l'obstacle à l'aide d'une tubulure. Déterminer l'expression du rayon r_2 de la tubulure du pontage permettant de rétablir le débit sanguin.

Réponses : 1 : $R_e = 2,3$; 2 : $R = 4,5 \times 10^5$ Pa $\cdot$ s $\cdot$ m^{-3}, $\Delta P = 6,9 \times 10^{-2}$ Pa ; 3 : $R' = 6R$; 4 : $r_2 = \sqrt[4]{\dfrac{5}{6}} r_0 = 0,67$ cm

PhTr078. Avion solaire autonome (**)

Nom du projet	*Solar Impulse*	*Sky Sailor*
Masse totale M de l'avion avec batteries (kg)	1600	2,6
Masse des batteries (kg)	400	1,05
Envergure (m)	61	3,2
Surface S des ailes (m^2) (totalement recouvertes de panneaux solaires)	200	0,80
Coefficient de traînée ("drag") C_D	0,012	0,013
Coefficient de portance ("lift") C_L	0,60	0,80
Nombre de moteurs	4	1
Puissance maximale par moteur (W)	6000	100

Nous souhaitons dans ce problème aborder quelques aspects de la conception d'un avion solaire autonome. Les ailes d'un tel avion sont recouvertes de panneaux solaires qui fournissent aux moteurs l'énergie nécessaire pour le faire voler. Pour un vol autonome, sans jamais avoir à se poser, il faut ajouter des batteries. Pendant la journée, l'énergie solaire reçue permet de faire voler l'avion mais aussi de charger

les batteries pour le vol de nuit. Sauf mention contraire, nous considérerons que l'avion vole horizontalement. Nous étudierons deux prototypes assez différents, mais conçus tous les deux pour pouvoir voler indéfiniment :
— celui du projet *Solar Impulse*, destiné à faire voler un humain (sur Terre),
— celui du projet *Sky Sailor*, destiné à voler dans l'atmosphère de Mars.

Première partie : puissance et masse de l'avion

Dans un premier temps, nous nous intéressons uniquement au vol de jour.
→ La sustentation de l'avion est assurée par une force aérodynamique : la portance $\vec{L}$, liée à l'écoulement de l'air autour des ailes. Cette force est perpendiculaire à la vitesse $\vec{V}$ de l'avion (vitesse de l'avion par rapport à l'air qui l'entoure). Sa norme est donnée par l'expression :

$$L = \frac{1}{2}\rho \times S \times C_L V^2$$

avec ρ la masse volumique de l'air, S la surface des ailes, et C_L le coefficient de portance.
→ L'écoulement d'air s'accompagne d'une force de frottement : la traînée $\vec{D}$. Elle est parallèle à la vitesse $\vec{V}$ de l'avion, mais de sens opposé. Son expression est très proche de celle de la portance :

$$D = \frac{1}{2}\rho \times S \times C_D V^2$$

avec C_D le coefficient de traînée.

Outre ces forces d'origine aérodynamique, l'avion est soumis à :
— son poids $\vec{P}$,
— la force de traction $\vec{T}$ exercée par les moteurs et hélices.

1. L'avion vole horizontalement, à vitesse constante. Faire un schéma des forces qui s'exercent sur lui. Trouver deux relations entre D, L, T, et P.
2. La puissance motrice est la puissance nécessaire pour faire avancer l'avion dans l'atmosphère. Montrer qu'elle peut s'exprimer de la façon suivante :
$$\mathcal{P} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{2g^3}{\rho C_L}}\frac{M^{3/2}}{S^{1/2}}$$
où $f = C_L/C_D$ est la "finesse" de l'avion.

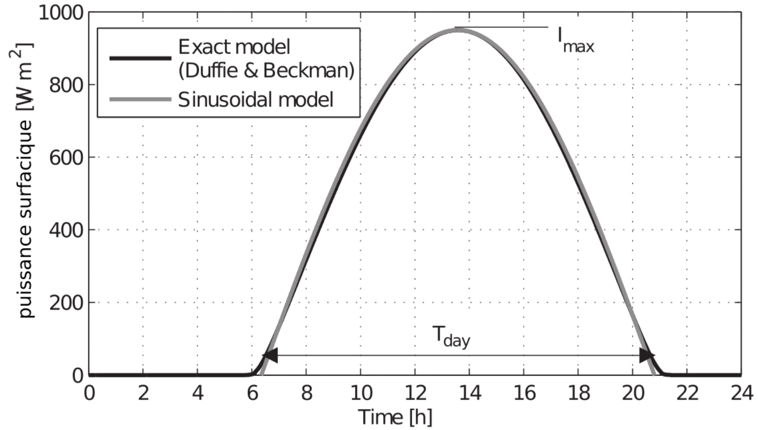
   On s'intéressera notamment à la vitesse de l'avion quand celui-ci doit voler horizontalement.
3. Est-il plus facile de faire voler un avion à haute, ou à basse altitude ? Sur Terre, ou sur Mars ?

Planète	Terre	Mars
accélération de la pesanteur g, au niveau du sol ($\mathrm{m^2/s}$)	9,8	3,7
masse volumique de l'atmosphère ρ, au niveau du sol ($\mathrm{kg/m^3}$)	1,2	0,015

4. Calculer numériquement la puissance nécessaire pour faire voler le *Solar Impulse* sur Terre, et le *Sky Sailor* sur Mars, pour un vol à basse altitude.
5. Exprimer l'énergie à fournir pour parcourir horizontalement une distance d, en fonction du poids de l'avion et de sa finesse. Commenter.

Seconde partie : lien entre puissance et surface des ailes

La puissance surfacique du rayonnement solaire, reçue sur Terre au niveau du sol, est tracée sur la figure ci-dessous au cours d'une journée. La figure représente la puissance surfacique du rayonnement solaire en fonction du temps, au cours d'une journée terrestre du mois de mai. T_{day} représente la durée où il fait jour à la latitude considérée, ici celle de Lausanne.



1. A partir de ces données, déterminer la moyenne sur une journée terrestre de la puissance surfacique du rayonnement solaire. En fait, à cause de la forme incurvée de l'aile, la puissance surfacique moyenne réellement disponible est de $250\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$.
2. Par un raisonnement dimensionnel, justifier que la puissance motrice P est proportionnelle à la taille caractéristique de l'avion à la puissance $7/2$, tandis que la puissance solaire totale disponible est proportionnelle à cette taille à la puissance 2. Quelle contrainte cela impose-t-il à la taille de l'avion ?

Réponses : 1.1 : $T = D$ et $P = L$; 1.4 : *Solar Impulse* : $\mathcal{P} = 4,6$ kW, *Sky Sailor* : $\mathcal{P} = 0,78$ W ; 1.5 : $\mathcal{E} = \dfrac{P \times d}{f}$; 2.1 : $I_m = 3,7 \times 10^2\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$

Résolution de problème

PhTr094. Soulèvement d'un bol (***)

On dépose un bol renversé sur une table, un joint assurant l'étanchéité. Le bol est assimilable à une demi-sphère de rayon R.
Le bol est percé d'un trou en son sommet. On verse de l'eau par ce trou.

Question : montrer qu'il existe une hauteur d'eau critique H_c au-delà de laquelle l'équilibre est rompu.

Réponse : $H_c = \sqrt[3]{\dfrac{3m}{\pi\rho}}$