

## TD04. Phénomènes de transport (correction)

### PhTr009. Modèle de Drude (\*).

- On applique la deuxième loi de Newton à un électron dont on suppose qu'il n'est soumis qu'à la force électrique et à la force de frottement fluide.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{-e\vec{E}}{m}}$$

- En régime permanent, la solution de l'équation vaut :  $\vec{v} = \frac{-e\tau}{m} \vec{E}$ .

On en déduit le vecteur densité de courant électrique :

$$\vec{j} = n \times (-e) \times \vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} \quad \text{donc} \quad \boxed{\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}}$$

- L'excitation étant sinusoïdale, on cherche une réponse sinusoïdale de la forme  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ; en appliquant la représentation complexe à l'équation du mouvement on en déduit :

$$im\omega\vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{-e\tau}{m} \frac{1}{1+i\omega\tau} \vec{E}$$

C'est à dire pour le vecteur densité de courant électrique :

$$\underline{\vec{j}} = n \times (-e) \times \underline{\vec{v}} \Rightarrow \underline{\vec{j}} = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1+i\omega\tau} \underline{\vec{E}}$$

On en déduit  $\omega_c = 1/\tau$ . Cette conductivité complexe est de type « **filtre passe-bas du premier ordre** ».

Du fait de l'inertie des électrons au sein de la structure, les porteurs de charge ne peuvent plus suivre les oscillations de l'excitation électrique pour des fréquences grandes devant la **pulsation de coupure**  $\omega_c$ .

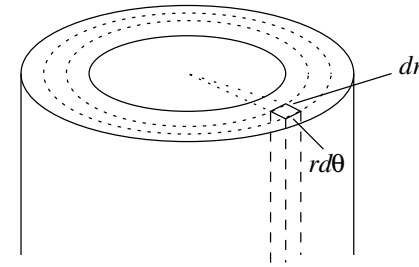
Les mouvements sont donc atténués et le caractère complexe de la conductivité électrique traduit la présence d'un retard du vecteur courant vis à vis de l'excitation électrique.

### PhTr038. Résistance d'un conducteur ohmique cylindrique (\*\*)

On considère un élément infinitésimal de longueur  $dr$  et de surface latérale  $h \times rd\theta$ .

Cet élément a une résistance infinitésimale :  $\delta^2 R = \frac{dr}{\gamma \times h r d\theta}$ .

On intègre alors sur l'angle  $\theta$ , les différents éléments infinitésimaux sont en parallèle, il faut donc ajouter les conductances pour obtenir la conductance équivalente de l'anneau d'épaisseur  $dr$  et de hauteur  $h$  :



$$\frac{1}{\delta R} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{\delta^2 R} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\gamma \times h \times r d\theta}{dr} = \frac{2\pi\gamma hr}{dr}$$

Il reste maintenant à ajouter la résistance des différents anneaux qui sont en série :

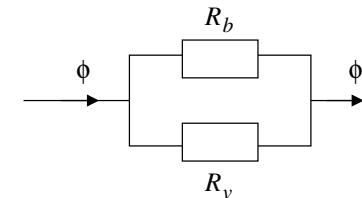
$$R = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{1}{2\pi\gamma h} \times \frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2\pi\gamma h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

### PhTr011. Fuite thermique (\*)

- $R_b = \frac{L_b}{\lambda_b S_b}$ . A.N. :  $\boxed{R_b = 21,7 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}}$ .

- Présence d'une lucarne :

- Les résistances sont en parallèle :



- Pour une association parallèle :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_v} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{\lambda_b(S - a^2)}{L_b} + \frac{\lambda_v a^2}{L_v}}$$

Application numérique :  $\boxed{R_{eq} = 17 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}}$ .

On constate que  $R_{eq} = 0,78R_b$ ; la création de la lucarne entraîne une augmentation des pertes thermiques de près de 30%.

### PhTr050. Résistance thermique, géométrie cylindrique (\*)

On considère le système de hauteur  $h$  limité par des cylindres de rayon  $r$  et  $r + dr$ . En régime permanent et en l'absence d'apports en volume, le flux entrant doit équilibrer le flux sortant, en conséquence  $\Phi(r) = \Phi(r + dr) = \Phi_0$ .

$\Phi_0$  est égal au flux du vecteur courant thermique à travers la surface d'un cylindre de rayon  $r$  quelconque et de hauteur  $h$  :

$$\Phi_0 = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} j(r) dS = j(r) \times \iint_{\Sigma} dS = j(r) \times 2\pi r \times h$$

La loi de Fourier conduit à :  $j(r) = -\lambda \frac{dT(r)}{dr}$ .

On en déduit :

$$\Phi_0 = -\lambda \frac{dT(r)}{dr} \times 2\pi r \times h \Leftrightarrow dT = -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda h} \frac{dr}{r}$$

On intègre alors entre  $R_1$  (température  $T_1$ ) et  $R_2$  (température  $T_2$ ) :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{-\Phi_0}{2\pi\lambda h} \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{-\Phi_0}{2\pi\lambda h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

La résistance thermique est le rapport de l'écart de température sur le flux thermique, avec  $T_1 > T_2$  le flux  $\Phi_0$  sortant est positif :

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

#### PhTr040. Étude thermique d'une habitation (\*)

1. On peut appliquer l'ARQS si l'évolution de la température au sein des murs est très rapide vis à vis de l'évolution de la température à l'intérieur de la maison. Ainsi le mur ou le toit est en état de quasi-équilibre thermique et la notion de résistance thermique reste valable.
2. Les murs et le toit sont soumis aux mêmes températures, ces deux éléments sont en parallèle, ce qui représentent une résistance équivalente  $R_{eq} = \frac{R_M R_T}{R_M + R_T}$ .

On applique le premier principe de la thermodynamique à l'intérieur de la maison de capacité thermique  $C$  entre deux instants voisins  $t$  et  $t + dt$ . Le système reçoit une puissance thermique  $P$  et évacue une puissance sous forme de flux thermique que l'on évalue à l'aide de la résistance thermique,  $\Phi = (T(t) - T_e)/R_{eq}$  :

$$CdT = Pdt - \frac{T(t) - T_e}{R_{eq}} dt$$

Ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{T(t)}{R_{eq}C} = \frac{P}{C} + \frac{T_e}{R_{eq}C} \quad \text{avec} \quad R_{eq} = \frac{R_M R_T}{R_M + R_T}$$

3. La solution générale de cette équation est de la forme (en posant  $\tau = R_{eq}C$ ) :

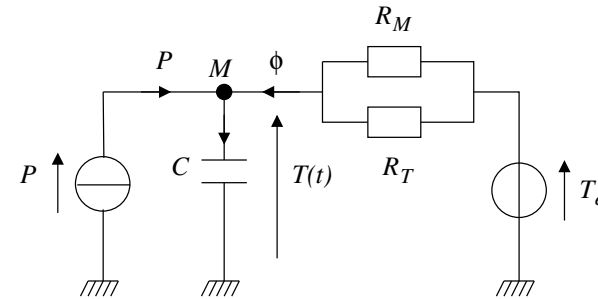
$$T(t) = Ae^{-t/\tau} + PR_{eq} + T_e$$

C'est à dire, compte tenu de la condition initiale :

$$T(t) = (T_0 - PR_{eq} - T_e)e^{-t/\tau} + PR_{eq} + T_e$$

On note que la présence de la source de chauffage permet d'atteindre une température d'équilibre supérieure à celle de l'extérieur.

4. La capacité thermique de la maison est équivalente à un condensateur de capacité  $C$  ; ce condensateur est « alimenté » d'une part par une source de courant qui modélise la source de chauffage et d'autre part par un générateur idéal de tension (température  $T_e$ ) relié au condensateur *via* les résistances thermiques :



5. La loi des nœuds appliquée au point  $M$  conduit à :

$$C \frac{dT}{dt} = P + \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = \frac{T_e - T(t)}{R_{eq}}$$

On retrouve l'équation différentielle précédemment obtenue.

#### PhTr045. Résistance thermique et transfert conducto-convectif (\*\*)

1. Pour la gaine de hauteur  $H$  limitée par des rayons  $R_1$  et  $R_2$ , la résistance thermique a pour expression (Cf. PhTr038) :

$$R_{th}^{gain} = \frac{1}{2\pi H \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

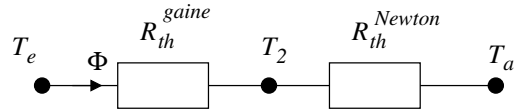
Pour l'échange conducto-convectif, on obtient le flux thermique en multipliant le flux surfacique par l'aire de la surface latérale du cylindre de rayon  $R_2$  et de hauteur  $H$  :

$$\Phi = \varphi \times 2\pi H R_2 = h_a(T_2 - T_a) \times 2\pi H R_2,$$

avec  $T_2$  la température sur la surface extérieure de la gaine. Par définition de la résistance thermique, on en déduit alors :

$$R_{th}^{Newton} = \frac{T_2 - T_a}{\Phi} \Rightarrow R_{th}^{Newton} = \frac{1}{2\pi R_2 H h_a}$$

2. Les résistances sont en série et s'ajoutent :



Ce qui donne pour le flux thermique sortant :

$$\Phi = \frac{T_e - T_a}{R_{eq}} = \frac{T_e - T_a}{R_{th}^{Newton} + R_{th}^{gainé}} \Rightarrow \Phi = \frac{T_e - T_a}{\frac{1}{2\pi R_2 H h_a} + \frac{1}{2\pi H \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Application numérique :

$$\Phi = \frac{323 - 293}{\frac{1}{2\pi \times 1,5 \times 0,04} \ln\left(\frac{7}{5}\right) + \frac{1}{2\pi \times 7 \times 10^{-2} \times 1,5 \times 10}} \Rightarrow \Phi = 28,7 \text{ W}$$

3. Sur une durée  $dt$ , on applique le premier principe de la thermodynamique à l'eau contenue dans le tube.

$$mc_e dT = \rho_e \times \pi R_1^2 \times H \times c_e dT = -\Phi \times dt = -\frac{T(t) - T_a}{R_{eq}} dt$$

La température vérifie une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{T(t)}{\tau} = \frac{T_a}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = R_{eq} \rho_e \pi R_1^2 H c_e$$

Compte tenu de la condition initiale  $T(0) = T_e$ , la solution est de la forme :

$$T(t) = (T_e - T_a)e^{-t/\tau} + T_a$$

On cherche l'instant  $t_0$  tel que  $T(t_0) - T_a = (T_e - T_a)/2$ , c'est à dire :

$$\frac{1}{2} = e^{-t_0/\tau} \Leftrightarrow t_0 = \tau \ln(2)$$

Application numérique :

$$t_0 = 1,048 \times 1,00 \times 10^3 \times \pi \times (5,0 \times 10^{-2})^2 \times 1,5 \times 4,18 \times 10^3 \times \ln(2)$$

C'est à dire  $t_0 = 3,57 \times 10^4$  s, soit  $t_0 \approx 10$  h.

### PhTr099. Évaporation du diazote (\*\*)

**Idée physique :** la température extérieure étant plus élevée que la température intérieure, un flux thermique vers l'intérieur se met en place, l'énergie apportée au système entraîne l'évaporation de l'azote liquide. La présence d'un mélange diphasé liquide vapeur assure que la température  $T_{vap}$  est fixée durant tout le processus d'évaporation.

**Stratégie de résolution :** on détermine tout d'abord la résistance thermique du dispositif, un bilan thermique permettra alors de trouver l'expression du débit

massique d'évaporation.

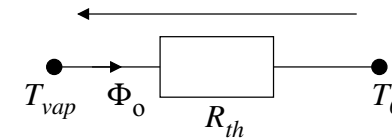
On considère comme système une coquille sphérique de l'isolant située entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ . En l'absence d'apports en volume et en régime permanent, le flux thermique est le même à travers la sphère de rayon  $r$  et celle de rayon  $r + dr$ , ce qui s'écrit :

$$\Phi_0 = \Phi(r) = \iint \vec{j}_Q(r) \cdot d\vec{S} = \iint j_Q(r) dS = j_Q(r) \times 4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 4\pi r^2$$

On intègre cette relation entre  $r = R_1$  et  $r = R_1 + e$ , limites de l'isolant :

$$\frac{-\Phi_0}{\lambda \times 4\pi} \int_{r=R_1}^{R_1+e} \frac{dr}{r^2} = \int_{T_{vap}}^{T_0} dT \Leftrightarrow \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \left[ \frac{1}{R_1 + e} - \frac{1}{R_1} \right] = T_0 - T_{vap}$$

C'est à dire :  $T_{vap} - T_0 = R_{th} \times \Phi_0$  avec  $R_{th} = \frac{e}{4\pi\lambda R_1(R_1 + e)}$ .



Notons que dans le cas présent,  $T_{vap} < T_0$  et  $\Phi_0$  défini vers l'extérieur est négatif.

On effectue alors un bilan thermique sur le diazote contenu à l'intérieur du dispositif. Pendant une durée  $dt$ , un flux entrant  $\Phi_e$  apporte une énergie  $\Phi_e dt$ . Cette énergie sert à évaporer une masse  $\delta m$ , en conséquence :

$$\delta m \times \ell_v = \Phi_e dt = \frac{T_0 - T_{vap}}{R_{th}} dt$$

En conséquence :

$$D_m = \frac{\delta m}{dt} = \frac{T_0 - T_{vap}}{\ell_v} \times \frac{4\pi\lambda R_1(R_1 + e)}{e}$$

### PhTr048. Diffusion au sein d'une sphère radioactive (\*\*)

1. Le vecteur densité volumique de particules représente un flux de particules par unité de surface.

Plus précisément, soit une surface élémentaire de vecteur surface  $d\vec{S}$  et  $\delta N$  le nombre de particules traversant cette surface pendant  $dt$ , le vecteur surface est défini selon :

$$\frac{\delta N}{dt} = \vec{j}_n \cdot d\vec{S}$$

La loi de Fick stipule que la diffusion est liée au gradient de la densité

particulaires selon la loi :

$$\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}}(n)$$

La comparaison des deux expressions en terme de dimension conduit à :

$$\left[ \frac{\delta N}{dt dS} \right] = [D] \frac{[n]}{L} \Rightarrow \frac{1}{T \cdot L^2} = [D] \frac{1}{L^4} \quad [D] = L^2 \cdot T^{-1}$$

Le coefficient de diffusion s'exprime donc en  $\boxed{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$  dans le système international d'unités.

2. On se place entre deux sphères de rayons  $r$  et  $r + dr$  situées au sein du cœur. En régime permanent, les apports (flux entrant en  $r$  et apports en volume) doivent compenser les pertes (flux sortant), ce qui s'écrit :

$$j_n(r) \times 4\pi r^2 dt + p \times 4\pi r^2 dr dt = j_n(r + dr) \times 4\pi (r + dr)^2 dt$$

Expression qui prend la forme :

$$j_n(r + dr)(r + dr)^2 - j_n(r)r^2 = pr^2 dr \Leftrightarrow \frac{d}{dr} (j_n(r)r^2) = pr^2$$

Une première intégration conduit à :

$$j_n(r)r^2 = \frac{pr^3}{3} + A \Rightarrow j_n(r) = \frac{pr}{3} + \frac{A}{r^2}$$

Le vecteur courant ne pouvant diverger à l'origine, la constante  $A$  est nécessairement nulle, il reste alors à utiliser la loi de Fick :

$$-D \frac{dn_c}{dr} = \frac{pr}{3} \Leftrightarrow \boxed{n_c(r) = -\frac{pr^2}{6D} + a}$$

En posant  $r = 0$ , on constate que  $a$  représente la densité particulière au centre de la boule.

3. À l'extérieur du cœur radioactif, on reprend le même bilan avec  $p = 0$  :

$$\frac{d}{dr} (j_n(r)r^2) = 0 \Rightarrow j_n(r) = \frac{b}{r^2}$$

La loi de Fick permet alors d'écrire :

$$-D \frac{dn_e}{dr} = \frac{b}{r^2} \Leftrightarrow \frac{dn_e}{dr} = -\frac{b}{Dr^2}$$

Ce qui conduit par intégration à :

$$\forall r \geq R, \quad n_e(r) = \frac{b}{Dr} + C$$

En supposant une densité particulière nulle à très grande distance  $C = 0$  et

finalement  $\boxed{n_e(r) = \frac{b}{Dr}}$ .

4. En  $r = R$ , il y a nécessairement continuité de la densité particulière (sinon le flux de particules ne pourrait être défini en ce point) et continuité du flux

particulaires (ni création ni d'absorption de particules à la surface), ce qui impose :

$$n_c(R^-) = n_e(R^+) \Leftrightarrow \frac{-pR^2}{6D} + a = \frac{b}{DR}$$

$$j_n(R^-) = j_n(R^+) \Leftrightarrow -D \times \left( \frac{-pR}{3D} \right) = -D \times \left( -\frac{b}{DR^2} \right)$$

La résolution du système d'équations conduit à :

$$\boxed{b = \frac{pR^3}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{a = \frac{pR^2}{2D}}$$

### PhTr007. Évaporation de l'éther (\*\*\*)

1. En régime permanent et en l'absence d'apports en volume, le flux de particules est le même en tout point de la colonne d'air. La section étant invariante, il en est de même du vecteur courant, ce qui s'écrit, en supposant la loi de Fick vérifiée :

$$-D \frac{dn}{dz} = cste \Rightarrow n(z) = Az + B$$

On détermine les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites :  $n(h) = n_1$  et  $n(H) = 0$ , ce qui conduit au système d'équations :

$$0 = AH + B \quad \text{et} \quad n_1 = Ah(t) + B$$

On en déduit :  $B = -AH$  et  $A = n_1 / (h(t) - H)$ , c'est à dire :

$$\forall z \in [h(t), H], \quad \boxed{n(z) = n_1 \times \frac{z - H}{h(t) - H}}$$

En  $z = h(t)$ , la loi des gaz parfaits conduit à :

$$P_{sat} = \frac{\delta n_{mol} RT}{dV} = \frac{\delta N RT}{N_a dV} = \frac{\delta N}{dV} \times \frac{R}{N_a} T = n_1 k_B T$$

2. Connaissant  $n(z)$  la densité particulière, on peut en déduire le flux de particules à l'aide du vecteur courant :

$$\Phi = -D \frac{dn}{dz} \times S = -D \times \frac{n_1}{h(t) - H} \times S \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{Dn_1 S}{H - h(t)}}$$

3. On trouve l'équation sur  $h(t)$  en effectuant un bilan de particules sur l'éther liquide encore présent.

À l'instant  $t$ , il y a  $N(t)$  particules d'éther liquide, et  $N(t + dt)$  à l'instant  $t + dt$ , la variation étant due au flux d'évaporation, ce qui s'écrit :

$$N(t + dt) = N(t) - \Phi(t) dt \Rightarrow dN = N(t + dt) - N(t) = -\frac{Dn_1 S}{H - h(t)} dt$$

On obtient le nombre de particules sous forme liquide à l'instant  $t$ , en divisant la masse de liquide par la masse d'une particule :

$$N(t) = \frac{\mu \times S \times h(t)}{M/\mathcal{N}_a} \Rightarrow dN = \frac{\mu S \mathcal{N}_a}{M} dh$$

En égalisant les deux dernières expressions, on obtient l'équation différentielle portant sur  $h(t)$  :

$$\frac{\mu S \mathcal{N}_a}{M} dh = -\frac{Dn_1 S}{H - h(t)} dt \Leftrightarrow [H - h(t)] dh = -\frac{Dn_1 M}{\mu \mathcal{N}_a} dt$$

On intègre alors cette équation entre l'instant initial et un instant quelconque :

$$\int_{h_0}^{h(t)} [H - h] dh = -\frac{Dn_1 M}{\mu \mathcal{N}_a} \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{H(h(t) - h_0) - \frac{h^2(t)}{2} + \frac{h_0^2}{2} = -\frac{Dn_1 M}{\mu \mathcal{N}_a} t}$$

4. Une fois la totalité de l'éther évaporée,  $h(\tau) = 0$ , l'équation précédemment obtenue conduit à :

$$-h_0 H + \frac{h_0^2}{2} = -\frac{Dn_1 M}{\mu \mathcal{N}_a} \tau \Leftrightarrow \boxed{\tau = \frac{\mu \mathcal{N}_a h_0}{Dn_1 M} \left( H - \frac{h_0}{2} \right)}$$

Application numérique :

$$\tau = \frac{626 \times 6,02 \times 10^{23} \times 5,0 \times 10^{-2} \times (0,10 - 0,025)}{1,5 \times 10^{-5} \times (0,58 \times 10^5 / (1,38 \times 10^{-23} \times 293)) \times 74,1 \times 10^{-3}}$$

$$\tau = 8,86 \times 10^4 \text{ s, soit } \boxed{\tau \approx 1 \text{ jour}}$$

5. À l'aide du coefficient de diffusion et d'une analyse dimensionnelle, on peut définir un temps caractéristique associé à la diffusion de l'éther sur une hauteur typique  $H$  :

$$D = \frac{H^2}{\tau_{diff}} \Leftrightarrow \tau_{diff} = \frac{H^2}{D} = \frac{0,10^2}{1,5 \times 10^{-5}} = 6,7 \times 10^2 \text{ s}$$

Le temps de mise à l'équilibre par diffusion de l'ordre de 10 minutes est court vis à vis du temps d'évolution du système de l'ordre d'une journée. L'hypothèse de l'état quasi-stationnaire est bien validée.

### PhTr005. Température de contact (\*\*\*)

1. Pour un problème à une dimension, et en l'absence d'apports en volume, l'équation de diffusion thermique s'écrit :

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

Vérifions que la fonction  $f(x, t) = \text{erf}(u)$  est une solution de cette équation.

$$\rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \times \left( \frac{x}{(4a)^{1/2}} \times \frac{-1}{2t^{3/2}} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{df}{du} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d^2 f}{du^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \times 0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times (-2ue^{-u^2}) \times \frac{1}{4at}$$

On en déduit :

$$\rho c \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\rho c}{2\sqrt{\pi} a^{1/2}} \times \frac{x e^{-u^2}}{t^{3/2}} \text{ et } \lambda \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{-\lambda}{2\sqrt{\pi} a^{3/2}} \times \frac{x e^{-u^2}}{t^{3/2}}$$

L'égalité des deux membres  $\forall x$  et  $\forall t > 0$  impose  $\rho c = \frac{\lambda}{a}$  qui est bien la valeur retenue pour  $a$ .

2. La fonction  $u \rightarrow \text{erf}(u)$  est une solution de l'équation de diffusion ; elle le reste si on la multiplie par une constante. L'équation étant linéaire, on peut ajouter toute fonction constante qui est une solution triviale du problème. Pour  $x < 0$ , on retient donc  $T_1(x, t) = A_1 \text{erf}(u_1) + B_1$  avec  $u_1 = \frac{x}{\sqrt{4a_1 t}}$ . Pour  $x > 0$ , on retient donc  $T_2(x, t) = A_2 \text{erf}(u_2) + B_2$  avec  $u_2 = \frac{x}{\sqrt{4a_2 t}}$ .

Il reste à vérifier les conditions aux limites et la condition initiale.

→ condition initiale :  $T_1(x, 0) = T_{10}$  et  $T_2(x, 0) = T_{20}$  :

Pour  $t \rightarrow 0$ ,  $u_1 \rightarrow +\infty$ , et  $u_2 \rightarrow -\infty$  ( $x < 0$ ) ; à l'aide de l'énoncé, on obtient :

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \text{erf}(u) = \pm 1$$

Ce qui impose :

$$\underline{T_{1,0} = -A_1 + B_1} \quad (1) \quad \text{et} \quad \underline{T_{2,0} = A_2 + B_2} \quad (2)$$

→ continuité de la température en  $x = 0$  :  $\forall t > 0$ ,  $T_1(0^-, t) = T_2(0^+, t)$  ; comme  $\text{erf}(0) = 0$ , cette condition impose :

$$\underline{B_1 = B_2} \quad (3)$$

→ continuité du flux thermique en  $x = 0$  :

$$-\lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) (0^-, t) = -\lambda_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) (0^+, t)$$

$$-\lambda_1 \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0^2} \times \frac{A_1}{\sqrt{4a_1 t}} = -\lambda_2 \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0^2} \times \frac{A_2}{\sqrt{4a_2 t}}$$

C'est à dire avec  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$  et  $\Gamma = \sqrt{\lambda \rho c}$  :

$$\frac{\lambda_1 A_1}{\sqrt{a_1}} = \frac{\lambda_2 A_2}{\sqrt{a_2}} \Rightarrow \underline{\Gamma_1 A_1 = \Gamma_2 A_2} \quad (4)$$

En toute rigueur, on doit également imposer  $T_1(-\infty, t) = T_{10}$  et

$T_2(-\infty, t) = T_{20}$ , ces égalités imposent cependant les mêmes conditions que les conditions initiales.

La résolution de ce système d'équations de quatre équations à quatre inconnues conduit à :

$$B_1 = B_2 = \frac{\Gamma_1 T_{10} + \Gamma_2 T_{20}}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$$

$$A_1 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} (T_{20} - T_{10}) \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} (T_{20} - T_{10})$$

Ce qui donne pour les températures  $\forall t > 0$  :

$$\forall x < 0, \quad T_1(x, t) = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} (T_{20} - T_{10}) \times \text{erf}(u_1) + \frac{\Gamma_1 T_{10} + \Gamma_2 T_{20}}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$$

$$\forall x > 0, \quad T_2(x, t) = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} (T_{20} - T_{10}) \times \text{erf}(u_2) + \frac{\Gamma_1 T_{10} + \Gamma_2 T_{20}}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$$

3. D'après les relations précédentes :  $T(0, t) = \frac{\Gamma_1 T_{10} + \Gamma_2 T_{20}}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$ .

On constate que  $T(0, t)$  est une constante indépendante du temps.

4. Avec les valeurs proposées, on obtient :

	eau	bois	fer
$a \text{ (m}^2 \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$	$1,32 \times 10^{-7}$	$7,14 \times 10^{-8}$	$2,29 \times 10^{-5}$
$\Gamma \text{ (W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{1/2}\text{)}$	$1,52 \times 10^3$	374	$1,67 \times 10^4$

Ce qui donne pour les températures de contact :

$$T_c^{\text{peau-bois}} = \underline{33,6^\circ\text{C}} \quad \text{et} \quad T_c^{\text{peau-fer}} = \underline{21,4^\circ\text{C}}$$

**On constate que la température de contact est beaucoup plus basse avec le métal ce qui contribue à une sensation de froid.**

5. Étude de la courbe :

- On retrouve bien la valeur de la température de contact en  $x = 0$ .
- En  $x = 0$ , il y a continuité du flux thermique et par extension du vecteur courant thermique mais pas de la dérivée de la température du fait de la différence de conductivité thermique des deux matériaux.
- L'équation de diffusion thermique :  $\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T$  impose  $[a] = \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}$  pour la dimension de la grandeur  $a$ , appelé diffusivité thermique. En conséquence, en une durée  $\tau = 1000$  s, le phénomène de diffusion thermique parcourt dans la peau une distance caractéristique :

$$d = \sqrt{a_{\text{peau}} \tau} = \sqrt{1,32 \times 10^{-7} \times 1000} \Rightarrow \boxed{d \approx 1 \text{ cm}}$$

Cette valeur est compatible en ordre de grandeur avec l'évolution du profil de température dans la peau en 1000 s.

## PhTr006. Ondes thermiques dans le sol (\*\*).

1. D'après l'équation de diffusion thermique  $[a] = \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}$ , en conséquence :

$$[\delta] = \left( \frac{[a]}{[\omega]} \right)^{1/2} = \left( \frac{\text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}}{\text{T}^{-1}} \right)^{1/2} \quad [\delta] = \text{L}$$

$\delta$  a la dimension d'une longueur.

2.  $T_0$  étant une constante, si  $T(x, t)$  est solution de l'équation de diffusion,  $\theta(x, t)$  l'est aussi.

Le milieu étant linéaire, l'excitation sinusoïdale en surface provoque une réponse sinusoïdale à la même fréquence dans le sol. L'équation étant linéaire à coefficients réels, il est possible d'utiliser la représentation complexe.

On reporte la forme proposée dans l'équation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{i\omega}{a} f(x) e^{i\omega t}$$

Avec  $\delta = \sqrt{2a/\omega}$ , on en déduit :

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{2i}{\delta^2} f(x) = 0$$

On cherche des solutions du type :  $x \rightarrow e^{rx}$ , l'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 - \frac{2i}{\delta^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{i\pi/4} = \pm \frac{1}{\delta} (1 + i)$$

La solution générale est donc de la forme :

$$\underline{\theta}(x, t) = A e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-i\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t} + B e^{\frac{x}{\delta}} e^{i\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t}$$

La seconde solution implique une divergence pour  $x \rightarrow +\infty$ , il faut donc retenir  $B = 0$ ; la condition aux limites en  $x = 0$  impose  $A = \Delta T/2$  :

$$\underline{\theta}(x, t) = \frac{\Delta T}{2} e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \Rightarrow \theta(x, t) = \frac{\Delta T}{2} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta)$$

Et finalement pour la température :  $T(x, t) = T_0 + \frac{\Delta T}{2} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta)$ .

3. On cherche  $l$  tel que  $e^{-l/\delta} = 1/100$  c'est à dire  $l = \delta \ln(100)$ .  $\delta$  varie comme  $1/\sqrt{\omega}$  et donc comme  $\sqrt{\text{Période}}$ , c'est à dire un rapport  $\sqrt{(365/1)} \approx 19$ . Pour les différents matériaux proposés, les rapports valent respectivement : 18,6; 18,9; 18,1; 16,3; 15. Pour le Roc, l'argile humide et le sable humide, le modèle est bien vérifié.

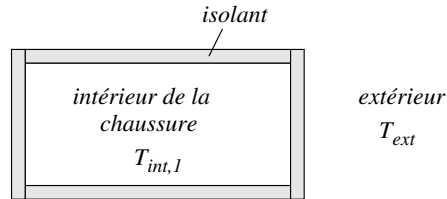
## PhTr098. Chaussure de ski (\*\*\*)

### Modélisation :

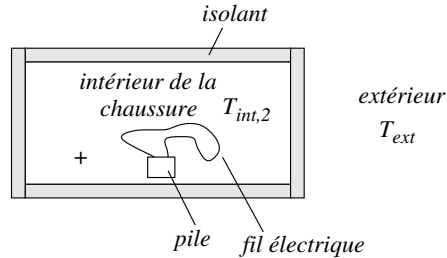
L'épaisseur de la chaussure étant faible devant les dimensions latérales de la chaussure, on peut proposer un modèle à une dimension. La chaussure étant prévue pour être utilisée sur une durée assez « longue » on se place en régime permanent.

On distingue alors deux situations :

- en l'absence d'apports d'énergie (autre que corporel) :



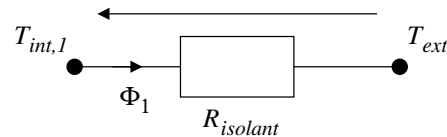
- en présence d'un dispositif de chauffage :



En associant un long fil électrique à la pile, on dissipe de l'énergie par effet Joule, on aura alors  $T_{int,2} > T_{int,1}$ .

### Mise en équation :

- première situation : la puissance thermique libérée au niveau du pied  $\Phi_p$  compense le flux sortant  $\Phi_1$  :



$$\Phi_1 = \frac{T_{int,1} - T_{ext}}{R_{isolant}} = \Phi_p \quad (1)$$

- seconde situation : la puissance thermique libérée au niveau du pied  $\Phi_p$  et l'apport par effet Joule compensent le flux sortant  $\Phi_2$  :

$$\Phi_2 = \frac{T_{int,2} - T_{ext}}{R_{isolant}} = \Phi_p + P_{Joule} \quad (2)$$

La comparaison des deux équations conduit à :

$$P_{Joule} = \frac{T_{int,2} - T_{int,1}}{R_{isolant}}$$

La résistance thermique de la chaussure correspond à l'association série du plastique et de la mousse, la mousse étant responsable de l'essentiel du pouvoir isolant et en appelant  $e$  l'épaisseur de la mousse,  $\lambda$  la conductivité thermique de la mousse et  $S$  la surface de la chaussure, on peut proposer  $R_{isolant} = \frac{e}{\lambda S}$ .

Le schéma électrique correspond à un générateur de tension  $U$  branché sur un fil assimilé à une résistance électrique. C'est à dire avec un fil de longueur  $\ell$ , de section  $S_{fil}$  et de conductivité électrique  $\sigma$  :

$$P_{Joule} = \frac{U^2}{R_{elec}} = \frac{U^2}{\ell/(\sigma S_{fil})} = \frac{U^2 \sigma S_{fil}}{\ell}$$

Ce qui donne pour la longueur du fil :

$$\frac{U^2 \sigma S_{fil}}{\ell} = \frac{\Delta T_{int}}{e} \times \lambda S \Leftrightarrow \ell = \frac{U^2 \sigma S_{fil} \times e}{\Delta T_{int} \times \lambda S}$$

### Application numérique :

Pour la conductivité électrique, on retient celle d'un bon conducteur  $\sigma \approx 6 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  ; pour le diamètre du fil  $d \approx 0,15 \text{ mm}$  ; pour l'épaisseur de mousse  $e \approx 1 \text{ cm}$ , et une conductivité thermique d'un bon isolant  $\lambda \approx 0,025 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  ; en assimilant la chaussure à un cylindre, on peut retenir une surface  $S \approx 0,1 \text{ m}^2$ . Enfin, considérons que le dispositif permet un gain de  $5^\circ \text{ C}$  pour la température.

$$\ell = \frac{9^2 \times (6 \times 10^7) \times (\pi/4) \times (1,5 \times 10^{-4})^2 \times 10^{-2}}{5 \times 0,025 \times 0,1} \Rightarrow \boxed{\ell \approx 70 \text{ m}}$$

### Analyse :

Cette longueur semble un peu trop importante pour l'entourer au sein de la chaussure. L'idée serait peut-être de privilégier un conducteur ohmique de résistance donnée à la place du fil dans lequel la pile débiterait.

$$\text{Comme } \Phi = \frac{\Delta T \times \lambda S}{e} = \frac{5 \times 0,025 \times 0,1}{0,01} \approx 1,25 \text{ W}, \text{ on en déduit :}$$

$$\frac{U^2}{R} = \Phi \Rightarrow R \approx 70 \Omega$$

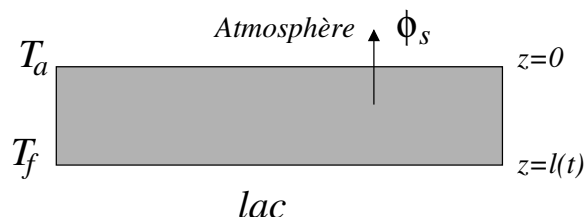
On peut donc privilégier une résistance de  $R = 70 \Omega$  branchée en série avec la pile.

Notons enfin qu'une pile alcaline classique  $9 \text{ V}$  a une capacité de l'ordre de  $500 \text{ mAh}$  c'est à dire pour une tension de  $9 \text{ V}$ , une énergie disponible :

$\mathcal{E} = 500 \text{ mAh} \times 9 \text{ V} = 4,5 \text{ Wh}$ , ce qui pour une puissance de l'ordre de 1,25 W n'assure que 3 ou 4 h de fonctionnement.

### PhTr097. Gel d'un lac (\*\*\*)

- On considère une épaisseur  $\ell(t)$  de glace, la température en  $z = 0$  étant égale à la température de l'atmosphère  $T_a$  et la température à l'interface glace-eau en  $z = \ell(t)$  étant égale à  $T_f$  la température de fusion. Comme  $T_f > T_a$ , on observe un flux sortant de l'eau vers l'atmosphère qui contribue au gel de l'eau.



La couche de glace, de masse volumique  $\rho_g$ , se construisant en plusieurs jours, il semble raisonnable de faire l'hypothèse d'un régime quasi-permanent ce qui permet d'utiliser la notion de résistance thermique. Pour une épaisseur  $\ell(t)$ , une conductivité thermique  $\lambda_g$  et une section  $S$ , la résistance thermique a pour expression  $R_{th} = \frac{\ell(t)}{\lambda_g S}$ .

On effectue alors un bilan thermique : en une durée  $dt$ , une énergie  $\Phi_s dt$  est évacuée, ce qui conduit, pour une enthalpie massique de fusion  $L_f$ , à la formation d'une masse de glace  $\delta m$  telle que :

$$\delta m \times L_f = \Phi_s dt = \frac{T_f - T_a}{R_{th}} dt \Leftrightarrow L_f \rho_g S dl = \frac{T_f - T_a}{\ell(t)} \times \lambda_g S dt$$

$$\Leftrightarrow \ell(t) dl = \frac{\lambda_g}{L_f \rho_g} (T_f - T_a) dt$$

On intègre entre l'instant initial et un instant quelconque :

$$\int_0^{\ell(t)} dl = \frac{\ell^2(t)}{2} = \frac{\lambda_g}{L_f \rho_g} (T_f - T_a) t \Leftrightarrow \ell(t) = \sqrt{\frac{2\lambda_g}{L_f \rho_g} (T_f - T_a) t}$$

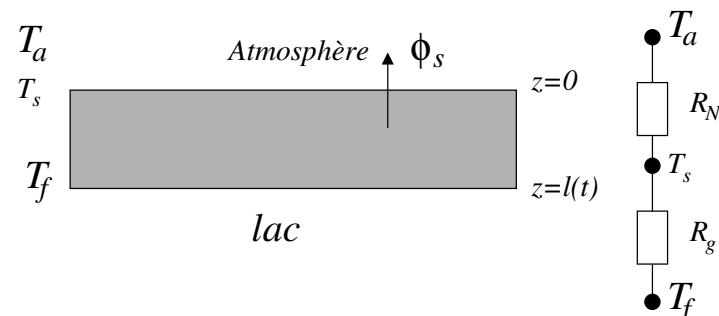
Application numérique :

Avec  $\lambda_g = 2,1 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $L_f = 333 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$  et pour la masse volumique  $\rho_g = 0,92 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , on obtient :

$$\ell(t) = \sqrt{1,37 \times 10^{-7} \times t} \quad \text{avec } t \text{ en seconde}$$

C'est à dire, 2 cm en une heure, 10 cm en une journée et 30 cm en une semaine. La première valeur semble sans doute surestimée, la seconde question va permettre d'améliorer le modèle.

- La présence d'un transfert conducto-convectif en surface ajoute une résistance thermique  $R_N$  en plus de la résistance thermique  $R_g$  précédemment calculée.



Pour un transfert conducto-convectif,  $\Phi = h(T_s - T_a)S$ , c'est à dire pour la résistance conducto-convectif  $R_N = \frac{1}{hS}$ . On peut alors associer les résistances en série pour déterminer la nouvelle résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{1}{hS} + \frac{\ell(t)}{\lambda_g S}$$

On remarque qu'aux temps courts (épaisseur « faible ») la résistance thermique n'est plus nulle et est dominée par le terme conducto-convectif ; aux temps longs (épaisseur « grande »), la résistance due à la conductivité au sein de la glace prédomine et qu'on sera ramené aux résultats de la première partie.

On peut alors reprendre le bilan conducto-convectif avec la nouvelle valeur de la résistance thermique :

$$\rho_g S dl \times L_f = \frac{T_f - T_a}{\frac{1}{hS} + \frac{\ell(t)}{\lambda_g S}} dt \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\ell}{dt} = \frac{h}{\rho_g L_f} \times \frac{T_f - T_a}{1 + \frac{h\ell(t)}{\lambda_g}}}$$

On retrouve l'expression proposée. Aux temps longs ( $h\ell(t)/\lambda_g \gg 1$ ), on retrouve l'équation différentielle de la première partie.

La température à la surface  $T_s = T_0(t)$  s'obtient par application d'un pont



diviseur :

$$T_a - T_0(t) = \frac{R_N}{R_g + R_N} \times (T_a - T_f) = \frac{1/hS}{1/hS + \ell(t)/(\lambda_g S)} \times (T_a - T_f)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_0(t) = T_a + \frac{1}{1 + \frac{h\ell(t)}{\lambda_g}} \times (T_f - T_a)}$$

On peut alors repartir de l'équation différentielle portant sur l'épaisseur de glace et l'intégrer :

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{h}{\rho_g L_f} \times \frac{T_f - T_a}{1 + \frac{h\ell(t)}{\lambda_g}}$$

$$\Leftrightarrow d\ell \left[ 1 + \frac{h}{\lambda_g} \ell(t) \right] = \frac{(T_f - T_a)h^2}{\rho_g L_f \lambda_g} \times \frac{\lambda_g}{h} dt$$

On pose alors  $l_0 = \lambda_g/h$  et  $\tau = \frac{\rho_g L_f \lambda_g}{(T_f - T_a)h^2}$  et on obtient (avec  $\ell(0) = 0$ ) :

$$d\ell \times \left[ 1 + \frac{\ell(t)}{l_0} \right] = l_0 \frac{dt}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \ell(t) + \frac{\ell(t)^2}{2l_0} = l_0 \times \frac{t}{\tau}$$

C'est à dire :  $\boxed{\ell(t) = l_0 \times \left[ \sqrt{1 + \frac{2t}{\tau}} - 1 \right]}$

Aux temps courts, avec un développement limité à l'ordre 1 en  $t/\tau$ , on obtient  $\ell(t) \sim_0 l_0 \times t/\tau$ , la dépendance est linéaire en accord avec les courbes en traits pleins. Plus précisément :

$$\ell(t) \sim_0 \frac{\lambda_g}{h} \times \frac{(T_f - T_a)h^2}{\rho_g L_f \lambda_g} \times t \quad \Rightarrow \quad \ell(t) \sim_0 \frac{h(T_f - T_a)}{\rho_g L_f} \times t$$

Dans les premiers instants, on retrouve que seule la résistance conducto-convective est présente (absence du terme  $\lambda_g$  dans la formule). La croissance de la glace est ralentie dans les premiers instants, en conformité avec les courbes en traits pleins toujours en-dessous de la courbe en traits pointillés.

Aux temps longs, l'expression précédente se simplifie selon :

$$\ell(t) = l_0 \sqrt{\frac{2t}{\tau}} = \frac{\lambda_g}{h} \times \sqrt{\frac{2t \times (T_f - T_a)h^2}{\rho_g L_f \lambda_g}}$$

$$\ell(t) = \sqrt{\frac{2\lambda_g(T_f - T_a)}{L_f \rho_g}} \times t$$

On retrouve le résultat de la première partie. Une fois la couche de glace suffisamment épaisse, la résistance thermique est dominée par le transfert diffusif au sein de la glace, le transfert conducto-convectif ne jouant plus aucun rôle ( $h$  absent de la formule).