Lycée Naval, Spé 2.

TD04. Phénomènes de transport.

Conduction électrique, diffusion thermique et de particules

Conduction électrique

PhTr009. Modèle de Drude (*).

On modélise le cuivre par un réseau cristallin constitué d'ions positifs fixes dans lequel des électrons de conduction se déplacent.
On appelle n le nombre d'atomes de cuivre par unité de volume et on suppose que chaque élément cuivre libère un électron de conduction. On note e la charge élémentaire.
Les collisions des électrons sur les ions du réseau et entre les électrons eux-mêmes sont modélisées par une force de frottement fluide $\vec{f_v} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$.

On applique au cuivre un champ électrique extérieur $\vec{E} = E\vec{u}_z$.

1. Appliquer la deuxième loi de Newton à un électron et déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de l'électron.
2. On se place en régime permanent. Montrer que l'on retrouve la loi d'Ohm locale et exprimer la conductivité électrique γ_0 en fonction de e, m, τ et n la densité particulaire.
3. On suppose maintenant que le champ électrique varie sinusoïdalement dans le temps : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$.
   Montrer que l'on peut définir une conductivité électrique complexe de la forme :
   $$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\frac{\omega}{\omega_c}}$$
   avec ω_c à exprimer en fonction des données.
   Donner sa signification physique.

Réponses : 1 : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{-e\vec{E}}{m}$; 2 : $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$; 3 : $\omega_c = 1/\tau$

PhTr038. Résistance d'un conducteur ohmique cylindrique

On considère un conducteur ohmique, de conductivité électrique γ, de forme cylindrique limité par deux cylindres concentriques de rayon R_1 et R_2 et de hauteur h.
On impose une différence de potentiel U entre les deux armatures, un courant purement radial apparaît.

On rappelle l'expression de la résistance d'un tronçon rectiligne de section S et de longueur L : $R = \frac{L}{\gamma S}$.

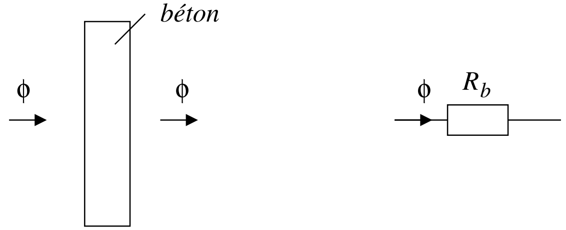
En utilisant cette expression et les lois d'association des résistances, déterminer la résistance de ce conducteur ohmique cylindrique.

Réponse : $R = \frac{1}{2\pi\gamma h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

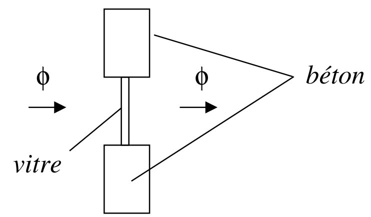
Conduction thermique

PhTr011. Fuite thermique (*)

On considère un mur en béton de surface $S_b = 5,0 \text{ m} \times 3,0 \text{ m}$ ayant une épaisseur $L_b = 30$ cm et de conductivité thermique $\lambda_b = 9,2 \times 10^{-1}$ W $\cdot$ m$^{-1} \cdot$ K^{-1}.



1. Déterminer la résistance thermique de cette paroi.
2. On perce alors une lucarne carrée de coté $a = 20$ cm, fermée par une vitre en verre d'épaisseur $L_v = 5$ mm et de conductivité thermique $\lambda_v = 1,5$ W $\cdot$ m$^{-1} \cdot$ K^{-1}.



   (a) Représenter le schéma équivalent au dispositif en terme de résistance thermique.

   (b) Déterminer la résistance thermique de ce nouvel ensemble et déterminer l'augmentation des pertes thermiques due à la présence de la lucarne.

Réponses : 1 : $R_b = 21,7 \times 10^{-3}$ K$\cdot$W^{-1} ; 2 : $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{\lambda_b(S - a^2)}{L_b} + \frac{\lambda_v a^2}{L_v}$; $R_{eq} = 17 \times 10^{-3}$ K$\cdot$W^{-1}

PhTr050. Résistance thermique, géométrie cylindrique (*)

Un matériau de conductivité thermique λ est limité par deux cylindres concentriques de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. Les deux cylindres ont une longueur h, avec $h \gg R_2$ de telle sorte que le dispositif est considéré invariant selon Oz.
On impose une température T_1 sur le cylindre intérieur et une température T_2 sur le cylindre extérieur.

Justifier que le flux thermique au sein du matériau est indépendant de la distance r à l'axe et en déduire la résistance thermique de ce dispositif.

Réponse : $R_{th} = \dfrac{1}{2\pi\lambda h} \ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$

PhTr040. Étude thermique d'une habitation (*)

On considère une maison de capacité thermique C. On appelle R_M la résistance thermique des murs et R_T la résistance thermique du toit.
La maison est à la température $T(t)$. L'extérieur est à la température T_e.
On suppose de plus que la maison dispose d'une source de chauffage qui délivre une puissance P.

1. Rappeler les conditions d'application de l'ARQS.
2. À l'aide d'un bilan thermique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$.
3. La résoudre en posant $T(0) = T_o$.
4. Représenter le schéma électrique équivalent à ce système thermique.
5. Retrouver à l'aide de ce schéma, l'équation différentielle vérifiée par la température de la maison.

Réponses : 2 : $\dfrac{dT(t)}{dt} + \dfrac{T(t)}{R_{eq}C} = \dfrac{P}{C} + \dfrac{T_e}{R_{eq}C}$ avec $R_{eq} = \dfrac{R_M R_T}{R_M + R_T}$;
3 : $T(t) = (T_0 - PR_{eq} - T_e)e^{-t/\tau} + PR_{eq} + T_e$

PhTr045. Résistance thermique et transfert conducto-convectif (**)

Un tube cylindrique de rayon R_1 de hauteur $H \gg R_1$ ($H = 1,5$ m ; $R_1 = 5,0$ cm) contient de l'eau à la température $T_e = 323$ K. Ce tube est entouré d'un manchon isolant de rayon extérieur $R_2 = 7,0$ cm constitué d'un matériau de conductivité thermique $\lambda = 0,04$ W $\cdot$ m$^{-1} \cdot$ K^{-1}, plongé dans l'air de température $T_a = 293$ K.

Le contact eau isolant est parfait.

Les échanges thermiques à l'interface isolant-air satisfont à la loi de Newton avec un coefficient valant $h_a = 10$ W $\cdot$ m$^{-2} \cdot$ K^{-1}.

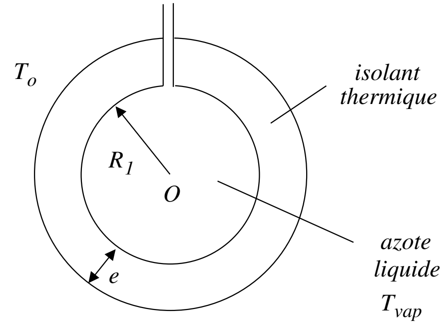
1. Déterminer la résistance thermique correspondant aux échanges thermiques à l'intérieur de la gaine. Déterminer la résistance thermique correspondant au transfert thermique de surface gaine-air.
2. En déduire la puissance thermique sortant en régime stationnaire en fonction de $T_e - T_a$. Application numérique.
3. On se place en régime quasi-stationnaire (la notion de résistance thermique peut être utilisée), déterminer le temps t_0 au bout duquel l'écart de température a chuté de moitié.

On donne la capacité thermique massique de l'eau $c_e = 4,18 \times 10^3$ J $\cdot$ kg$^{-1} \cdot$ K^{-1}, masse volumique de l'eau $\rho_e = 1,00 \times 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}.
On rappelle la loi de Newton : le flux surfacique conducto-convectif sortant d'une surface à la température T en contact avec un fluide à la température T_0 vaut : $\varphi = h(T - T_0)$, h étant le coefficient de transfert conducto-convectif .

Réponses : 1 : $R_{th}^{gaine} = \dfrac{1}{2\pi H\lambda} \ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$; $R_{th}^{Newton} = \dfrac{1}{2\pi R_2 H h_a}$; 2 : $\Phi = 28,7$ W ; 3 : $t_0 \simeq 10$ h

PhTr099. Évaporation du diazote (**)

On considère un isolant thermique de conductivité thermique λ sous forme d'une coquille sphérique de rayons intérieur R_1 et extérieur $R_1 + e$.
On appelle ℓ_v l'enthalpie massique de vaporisation de l'azote liquide. L'azote liquide est supposé être à la température de vaporisation T_{vap}.



Déterminer l'expression du flux massique, masse de diazote qui s'évapore par unité de temps.

Réponse : $D_m = \dfrac{\delta m}{dt} = \dfrac{T_0 - T_{vap}}{\ell_v} \times \dfrac{4\pi\lambda R_1(R_1 + e)}{e}$

Diffusion de particules

PhTr048. Diffusion au sein une sphère radioactive (**)

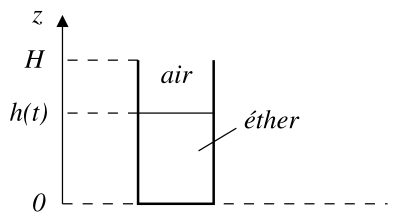
On considère une sphère de centre O et de rayon R qui produit en son cœur p neutrons par unité de volume et de temps. Les particules possèdent un coefficient de diffusion D.

1. Rappeler la définition du vecteur densité de particules $\vec{j}_n$ et la loi de Fick. Trouver l'unité de D.
2. Effectuer un bilan de particules dans le cœur ($r < R$) pour trouver l'équation différentielle sur n_c, la densité particulaire au sein du cœur et exprimer n_c en fonction de p, D et d'une constante a dont il faudra préciser le sens physique.
3. Faire de même dans le cas où $r > R$ pour déterminer n_e, la densité particulaire à l'extérieur, avec une constante prise égale à b.
4. Étudier les conditions aux limites et le cas où $r = R$ pour déterminer a et b.

Réponses : 2 : $n_c(r) = -\dfrac{pr^2}{6D} + a$; 3 : $n_e(r) = \dfrac{b}{Dr}$; 4 : $a = \dfrac{pR^2}{2D}$; $b = \dfrac{pR^3}{3}$

PhTr007. Évaporation de l'éther (***).

Un bécher cylindrique contient de l'éther liquide. À l'instant initial, l'éther remplit une hauteur $h_0 = 5,0$ cm dans un bécher de hauteur $H = 10$ cm.



À l'interface $h(t)$, la pression partielle d'éther est égale à la pression de vapeur saturante à la température ambiante $T_0 = 293$ K et à la sortie du bécher, la pression partielle de l'éther est négligeable (l'éther est évacué par les mouvements de l'air) ; les vapeurs d'éther sont assimilées à un gaz parfait.

On suppose que la durée de diffusion de l'éther dans l'air est très inférieure à la durée caractéristique de l'évaporation de l'éther, on pourra donc considérer le régime quasi-permanent.

1. Dans ces conditions, montrer que la densité particulaire $n(z)$ d'éther entre l'interface $z = h(t)$ et l'extrémité $z = H$ vérifie :
$$n(z) = \frac{n_1 \times (z - H)}{h(t) - H} \quad \text{avec} \quad n_1 = \frac{P_s}{k_B T}$$
2. En déduire le flux Φ d'éther à l'interface, en notant S la section du bécher.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la hauteur d'éther $h(t)$ et l'intégrer.
4. En déduire la durée τ nécessaire à l'évaporation de l'éther.
5. Vérifier l'hypothèse faite du régime quasi-permanent.

<u>Données</u> :
Masse molaire de l'éther $M = 74,1\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
masse volumique de l'éther : $\mu = 626\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
coefficient de diffusion de l'éther dans l'air : $D = 1,5 \times 10^{-5}\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$;
pression de vapeur saturante de l'éther à 293 K : $P_s = 0,58$ bar ;
constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Réponses : 2 : $\Phi = \dfrac{Dn_1 S}{H - h(t)}$; 3 : $\dfrac{\mu S \mathcal{N}_a}{M} dh = -\dfrac{Dn_1 S}{H - h(t)} dt$; $H(h(t) - h_0) - \dfrac{h^2(t)}{2} + \dfrac{h_0^2}{2} = -\dfrac{Dn_1 M}{\mu \mathcal{N}_a} t$; 4 : $\tau = \dfrac{\mu \mathcal{N}_a h_0}{Dn_1 M}\left(H - \dfrac{h_0}{2}\right) \simeq 1$ jour

Régimes variables

PhTr005. Température de contact (***).

Lorsqu'on pose sa main sur deux objets d'une même pièce, l'un en bois, l'autre en métal, la sensation thermique est souvent très différente bien que les deux objets soient à la même température, celle de la pièce.

On considère deux barres à base circulaire de petit rayon r, accolées, calorifugées sur leur surface latérale, constituées de matériaux différents :
- pour $x < 0$, on a une capacité thermique massique c_1, une conductivité thermique λ_1, une masse volumique ρ_1 ; la barre étant initialement à la température $T_{1,0}$;
- pour $x > 0$, on a une capacité thermique massique c_2, une conductivité thermique λ_2, une masse volumique ρ_2 ; la barre étant initialement à la température $T_{2,0}$.

On cherche à déterminer à une date t quelconque la température de contact $T(0, t)$.
Les barres sont supposées infiniment longues.
On pose $\Gamma_1 = \sqrt{\rho_1 c_1 \lambda_1}$ et $\Gamma_2 = \sqrt{\rho_2 c_2 \lambda_2}$

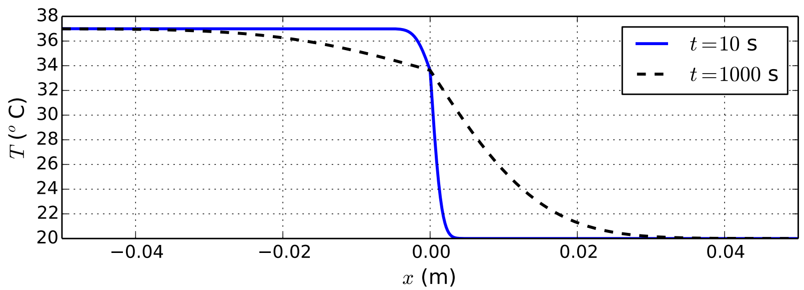
1. Montrer que la fonction $\text{erf}(u) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^u e^{-y^2} dy$, avec $u = \dfrac{x}{\sqrt{4at}}$ est une solution de l'équation de la diffusion thermique à une dimension, $a = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ étant la diffusivité thermique du matériau. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. En utilisant les conditions initiales et les conditions aux limites, et en cherchant dans chaque domaine des solutions de la forme : $A_1\mathrm{erf}(u_1)+B_1$ et $A_2\mathrm{erf}(u_2)+B_2$, déterminer complètement $T(x,t)$.
3. En déduire $T(0,t)$ en fonction de $T_{1,0}$, $T_{2,0}$, Γ_1 et Γ_2.
4. Déterminer la température de contact pour une interface peau-bois ou peau-fer (pour simplifier on assimilera la peau à de l'eau). On retient 37°C pour la température du corps humain et 20°C pour le bois et le fer dans la pièce.

	λ ($\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$)	ρ ($\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$)	c ($\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$)
eau	0,550	1000	4180
bois	0,1	700	2000
métal	80	7860	444

Conclusion.

5. La courbe ci-dessous représente le profil de température pour l'interface peau-bois à deux instants.



   (a) Vérifier la valeur de la température de contact.
   (b) La fonction donnant la température en fonction de la position n'est pas dérivable en $x=0$. Pourquoi ?
   (c) À l'aide d'une estimation qualitative et dimensionnelle de l'équation de diffusion thermique, retrouver l'ordre de grandeur de profondeur de pénétration au sein de la peau au bout de 1000 s.

Réponses : 2 : $\forall x<0,\quad T_1(x,t)=\dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}(T_{20}-T_{10})\times\mathrm{erf}(u_1)+\dfrac{\Gamma_1T_{10}+\Gamma_2T_{20}}{\Gamma_1+\Gamma_2}$; $\forall x>0,\quad T_2(x,t)=\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2}(T_{20}-T_{10})\times\mathrm{erf}(u_2)+\dfrac{\Gamma_1T_{10}+\Gamma_2T_{20}}{\Gamma_1+\Gamma_2}$; 3 : $T(0,t)=\dfrac{\Gamma_1T_{1,0}+\Gamma_2T_{2,0}}{\Gamma_1+\Gamma_2}$; 4 - $T_c^{peau-bois}=33,6°\mathrm{C}$; $T_c^{peau-fer}=21,4°\mathrm{C}$

PhTr006. Ondes thermiques dans le sol (**).

On étudie la répartition de températures à l'intérieur du sol modélisé par le demi-espace $x\geq 0$, homogène. On note ρ sa masse volumique, λ sa conductivité thermique, c sa capacité thermique massique, $a=\dfrac{\lambda}{\rho c}$ sa diffusivité thermique.
Dans ces conditions, la température dans le sol ne dépend que de la profondeur x et du temps t, et elle est régie par l'équation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}\qquad(*)$$

On cherche à déterminer $\theta(x,t)=T(x,t)-T_0$ pour $x\geq 0$ sachant que les variations de température à la surface imposent $\theta(0,t)=\dfrac{\Delta T}{2}\cos(\omega t)$.

1. On pose $\delta=\sqrt{\dfrac{2a}{\omega}}$. Quelle est la dimension de cette grandeur ?
2. On se place en régime sinusoïdal forcé : les solutions de $(*)$ sont cherchées sous la forme $\theta(x,t)=Re\left[\underline{\theta}(x,t)\right]$ avec $\underline{\theta}(x,t)=\underline{f}(x)e^{i\omega t}$. Justifier cette forme.
   Déterminer l'équation différentielle régissant la fonction $\underline{f}(x)$. Montrer que les solutions les plus générales s'écrivent alors sous la forme :
   $$\underline{f}(x)=Ae^{-\frac{x}{\delta}}e^{-i\frac{x}{\delta}}+Be^{\frac{x}{\delta}}e^{i\frac{x}{\delta}}$$
   Donner la loi $T(x,t)$ en régime établi.
3. On définit l, la « profondeur de pénétration » comme la profondeur à laquelle l'amplitude d'une variation de température est réduite à 1% de son amplitude en surface. On mesure des profondeurs de pénétration pour des cycles quotidiens et annuels, selon le type de sol étudié :

	a ($\mathrm{cm^2\cdot s^{-1}}$)	période 24 h l (m)	période 1 an l (m)
Roc	0,020	1,10	20,5
Argile humide	0,015	0,95	18,0
Sable humide	0,010	0,80	14,5
Argile sèche	0,002	0,40	6,5
Sable sec	0,001	0,30	4,5

   Montrer que le rapport des profondeurs de pénétration pour un matériau donné est conforme à la théorie étudiée.

Réponses : 1 : $[\delta]=L$; 2 : $\dfrac{d^2\underline{f}(x)}{dx^2}-\dfrac{2i}{\delta^2}\underline{f}(x)=0$; $T(x,t)=T_0+\dfrac{\Delta T}{2}e^{-x/\delta}\cos(\omega t-x/\delta)$

Résolution de problème

PhTr098. Chaussure de ski (***)

On dispose d'une pile 9 V et de fil électrique.

Question : proposer un dispositif pour améliorer le confort thermique au sein d'une chaussure de ski.

PhTr097. Gel d'un lac (***)

On considère l'air de l'atmosphère à une température constante $T_a = 263$ K au-dessus d'un lac. On suppose qu'une couche de glace se forme « lentement » à la surface du lac. L'eau est à la température $T_i = 273$ K.

1. Dans un premier temps, on considère que la glace en contact avec l'air est à la température T_a.
   Proposer un modèle de croissance pour l'épaisseur ℓ de la couche de glace.
2. En tenant compte d'un transfert conducto-convectif (loi de Newton de coefficient h) entre la glace et l'air, les équations donnant la température T_0 à la surface de la glace en contact avec l'air et l'épaisseur ℓ de la couche de glace deviennent :

   $$T_0(t) = T_a + \frac{T_i - T_a}{1 + \dfrac{h\ell(t)}{\lambda_g}} \quad \text{et} \quad \frac{d\ell}{dt} = \frac{h}{\rho_g L_f} \times \frac{T_i - T_a}{1 + \dfrac{h\ell(t)}{\lambda_g}}$$

   avec λ_g la conductivité thermique de la glace, ρ_g sa masse volumique et L_f l'enthalpie massique de fusion.

   Les courbes ci-après représentent l'évolution de l'épaisseur de glace au cours du temps pour la situation simple de la première question (en pointillés) et pour trois valeurs différentes du coefficient h.

   Discuter l'allure des courbes et les formules proposées en comparaison avec le résultat de la première partie.