

TD03 : Électronique numérique, modulation (correction)

Elec052. Conditions de Shannon (*).

1. $T_e = 1/f_e = 1/(20 \times 10^3) \Rightarrow T_e = 50 \mu s$.

L'intervalle minimal en fréquence vaut $f_e/N = 20 \text{ Hz}$.

La fréquence maximale du signal échantillonné ne doit pas dépasser 10 kHz. Pour diminuer l'intervalle minimal entre deux raies, il faut **augmenter le nombre de points N**.

Pour échantillonner un signal de fréquence plus élevée, il faut augmenter f_e .

2. On peut choisir $f_e = 20 \text{ kHz}$ et $N = 4096$, ainsi $f_e > 2f_{max}$ (critère de Shannon) et $f_e/N \simeq 5 \text{ Hz}$, les deux raies seront séparées.

Elec053. Signal créneau et critère de Shannon (**).

→ Le spectre d'un signal créneau ne devrait comporter que le fondamental ω_0 et les harmoniques impairs du type $(2k + 1)\omega_0$ avec des amplitudes proportionnelles à $1/(2k + 1)$.

→ Pour ce signal de fréquence fondamentale 100 Hz, on devrait donc détecter une raie à 100 Hz et une raie à 300 Hz dans l'intervalle [0, 450 Hz] si le signal était correctement échantillonné.

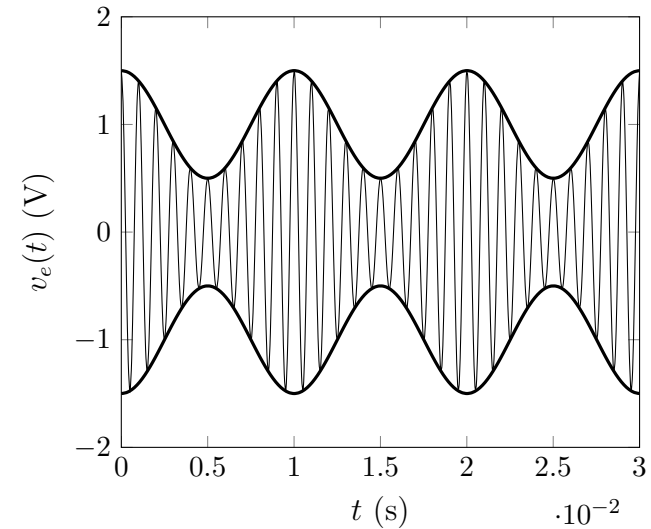
→ La fréquence d'échantillonnage étant de 900 Hz, $f_e/2 = 450 \text{ Hz}$, et on observe un **repliement du spectre pour les harmoniques à 500 Hz et à 700 Hz**.

La fréquence à 500 Hz se replie, autour de 450 Hz, sur 400 Hz et celle de 700 Hz sur 200 Hz, ce qui fait apparaître de **raies parasites à 200 Hz et 400 Hz sur le spectre**.

Elec060. Démodulation d'amplitude (**).

1. Allure du signal modulé (avec $V_o = 1 \text{ V}$, $f_m = 100 \text{ Hz}$ et $f_p = 1 \text{ kHz}$) :

Pour tracer cette courbe, on commence par tracer les enveloppes $(1 + 0,5 \cos(\omega_m t))$ et $(-1 - 0,5 \cos(\omega_m t))$, le signal de la porteuse oscillant à une fréquence dix fois supérieure entre ces deux enveloppes.



2. Démodulation :

- (a) En appelant k la constante multiplicative introduite par le multiplieur, le signal en sortie du composant est de la forme :

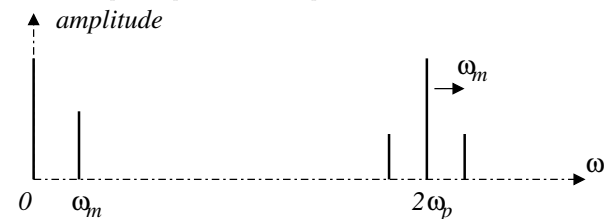
$$v_m(t) = kV_pV_o (1 + m \cos(\omega_m t)) \cos^2(\omega_p t)$$

Sachant que $\cos^2(\omega_p t) = (1 + \cos(2\omega_p t)) / 2$, on en déduit :

$$v_m(t) = \frac{kV_pV_o}{2} [1 + m \cos(\omega_m t) + \cos(2\omega_p t) + m \cos(\omega_m t) \cos(2\omega_p t)]$$

avec $\cos(\omega_m t) \cos(2\omega_p t) = 1/2 (\cos([2\omega_p - \omega_m] t) + \cos([2\omega_p + \omega_m] t))$

Le signal en sortie du multiplieur contient des composantes aux pulsations $0, \omega_m, 2\omega_p, 2\omega_p - \omega_m, 2\omega_p + \omega_m$



- (b) On choisit un filtre passe-bas RC de fréquence de coupure $\omega_c = 1/(RC)$ avec $\omega_m \ll \omega_c \ll 2\omega_p$ afin d'éliminer les hautes fréquences tout en préservant la composante du signal modulant.

Elec061. Convertisseur analogique numérique simple rampe (***)

1. Génération d'une rampe de tension :

- (a) L'interrupteur étant ouvert et la résistance d'entrée de l'ALI infinie, le courant I_0 s'écoule en totalité dans le condensateur :

$$I_0 = C \frac{du_c}{dt}$$

- (b) L'interrupteur ayant été fermé en $t = 0^-$, la continuité de la tension aux bornes du condensateur assure : $u_c(0) = 0$.

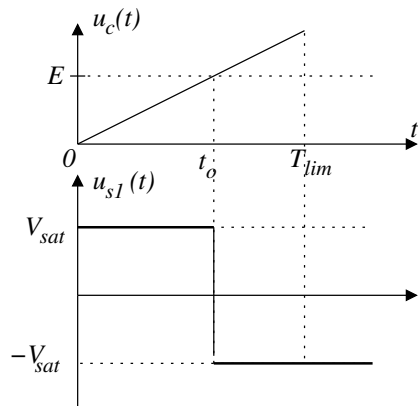
- (c) Avec des coefficients I_0 et C constants, l'équation s'intègre immédiatement selon :

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{I_0}{C_0} \Rightarrow u_c(t) = \frac{I_0}{C_0} t$$

2. Comparaison à la tension à numériser :

- (a) L'ALI fonctionne en comparateur simple.

- (b) On observe un basculement de la tension de sortie pour $u_c(t_0) = E$.



3. Adaptation à la logique TTL :

Pour expliquer le fonctionnement du montage, il faut considérer les deux états possibles de la diode :

→ diode passante : $i_d = 0$, donc $u_{s2} = u_{s1}/3$ (pont diviseur de tension). À condition que $i_d > 0$, c'est à dire $u_{s1} = 3Ri_d > 0$.

→ diode bloquante : $i_d = 0$, donc $u_{s2} = 0$ (aucun courant dans la résistance).

À condition que $u_d < 0$, c'est à dire $u_{s1} = u_d + u_{s2} = u_d < 0$

En résumé :

$$\text{si } u_{s1} = +V_{sat} > 0 \quad u_{s2} = \frac{V_{sat}}{3}; \quad \text{si } u_{s2} = -V_{sat} < 0 \quad u_{s2} = 0$$

Avec $V_{sat} \simeq 15 \text{ V}$, le montage ramène bien la tension de sortie dans l'intervalle souhaitée.

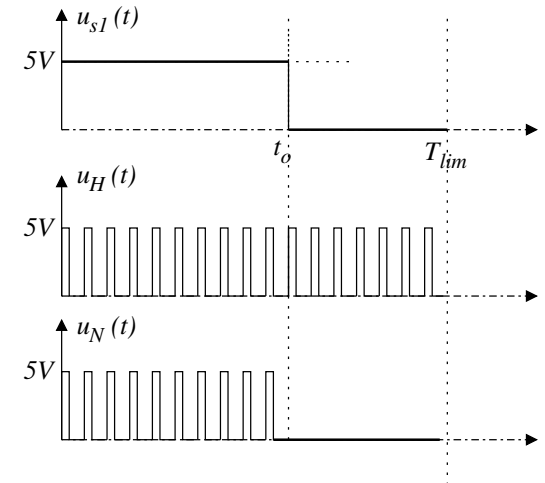
4. Porte ET :

De la table de vérité d'une porte ET, on déduit :

→ Si $u_{s2} > 0$ et $u_H > 0$, $u_N(t) > 0$

→ Si $u_{s2} = 0$ ou $u_H = 0$, $u_N(t) = 0$.

Ce qui donne pour les chronogrammes :



5. Compteur :

En supposant que t_0 soit un multiple de t_H , alors $N = t_0/T_H$; d'après la première partie : $E = \frac{I_0}{C_0} t_0$, on en déduit :

$$N = \frac{C_0}{I_0 T_H} E$$

Elec064. Convertisseur flash (**)

1. Dans le cas d'un convertisseur 3 bits, il y a $2^3 - 1 = 7$ comparateurs, 1 résistance $3R/2$, 6 résistances R et une résistance $R/2$.

Les tensions V_k se déterminent à l'aide de la formule du pont diviseur de tension, ainsi pour le potentiel V_1 :

$$V_1 = \frac{6 \times R + R/2}{6 \times R + R/2 + 3R/2} V_{ref} = \frac{13/2 \times R}{8R} V_{ref} \Rightarrow V_1 = \frac{13}{16} V_{ref}$$

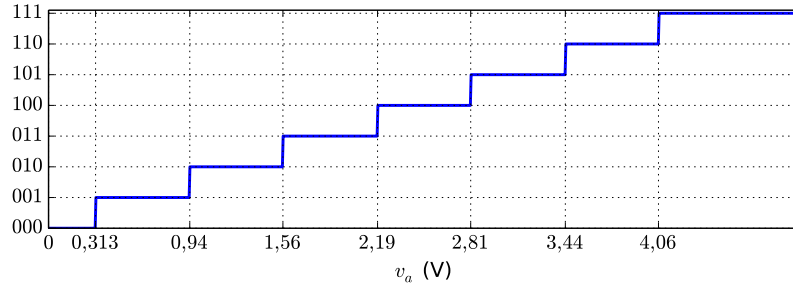
Avec une méthode identique, on détermine l'ensemble des potentiels de seuil :

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
$13V_{ref}/16$	$11V_{ref}/16$	$9V_{ref}/16$	$7V_{ref}/16$	$5V_{ref}/16$	$3V_{ref}/16$	$V_{ref}/16$
4,06 V	3,44 V	2,81 V	2,19 V	1,56 V	0,94 V	0,313 V

2. Dans le cas présent, $V_1 > v_a$ et $V_k < v_a \forall k \in \{2, \dots, 7\}$, on en déduit :

Code thermomètre : 0111111 et Code binaire : 110.

3. Le niveau binaire bascule pour chacun des seuils :



4. La résolution de ce convertisseur est $2V_{ref}/16 = V_{ref}/8$; ainsi des tensions comprises entre 2,20 V et 2,80 V renvoient le même code binaire. Plus généralement, pour ce convertisseur N bits, la résolution vaut $V_{ref}/2^N$.

Pour améliorer la résolution, il faut augmenter le nombre de comparateurs en passant par exemple d'un convertisseur 3 bits (7 comparateurs) à un comparateur 4 bits (15 comparateurs). Le coût à payer est bien évidemment la complexification du dispositif.

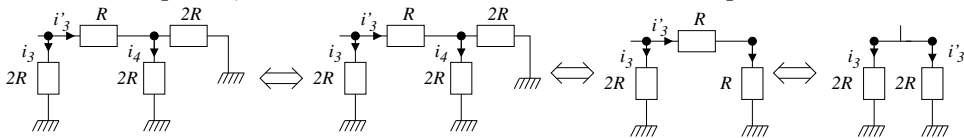
Elec065. CNA à échelle R-2R (**)

1. L'ALI idéal fonctionnant en régime linéaire, le potentiel de l'entrée inverseuse est égal au potentiel de l'entrée non inverseuse reliée à la masse.

En conséquence, quelle que soit la position de l'interrupteur, $V_{S1} = 0$ V. La loi d'Ohm conduit à :

$$i_1 = \frac{V_{ref}}{2R}$$

2. Pour simplifier, on considère une situation à 4 interrupteurs :



Partant de la droite, on effectue une association parallèle, puis une association série, qui montre bien que $i'_3 = i_3$.

Le résultat est généralisable quel que soit k .

3. La loi des nœuds impose : $i'_{k-1} = i_k + i'_k = 2i_k$ d'après la question précédente ; comme $i'_{k-1} = i_{k-1}$, on en déduit :

$$i_k = \frac{i_{k-1}}{2} \Rightarrow i_k = \frac{i_1}{2^{k-1}}$$

De plus la loi d'Ohm appliquée entre l'entrée inverseuse et la sortie impose :

$$i_{sa} = \frac{v_- - v_{sa}}{R} \Rightarrow v_{sa} = -R \times i_{sa}$$

Le courant d'intensité i_{sa} résulte de la somme des courants i_k à condition que l'interrupteur k soit relié à l'entrée inverseuse, ce qui impose :

$$v_{sa} = -Ri_{sa} = -R \sum_{k=1}^N b_k i_k = -R \sum_{k=1}^N b_k \frac{i_1}{2^{k-1}} = -Ri_1 \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{2^{k-1}} = -\frac{V_{ref}}{2} \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{2^{k-1}}$$

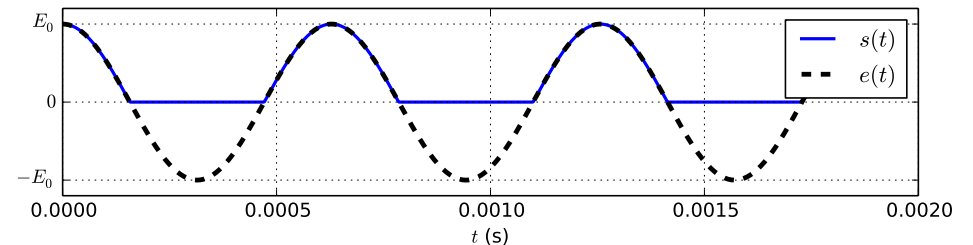
Expression que l'on peut réécrire :

$$v_{sa} = -\frac{V_{ref}}{2^N} \sum_{k=1}^N b_k \times 2^{N-k} \Rightarrow v_{sa} = -\frac{V_{ref}}{2^N} \sum_{k=1}^N b_k \times 2^{N-k}$$

La tension analogique obtenue en sortie est bien proportionnelle au nombre numérique codé en binaire.

Elec071. Détecteur de crêtes (***)

1. On étudie les deux cas possibles pour la diode :



→ diode passante : $u_d = 0$ à condition $i > 0$.

La loi des mailles conduit à : $e(t) = u_d + s(t) = s(t) = Ri(t)$ à condition que $i > 0$ c'est à dire $e(t) > 0$:

Conclusion : **diode passante** : $s(t) = e(t)$ à condition que $e(t) > 0$

→ diode bloquante : $i = 0$ à condition $u_d < 0$.

$i = 0 \Rightarrow s(t) = Ri = 0$ à condition que $e(t) = u_d < 0$.

Conclusion : **diode bloquante** : $s(t) = 0$ à condition que $e(t) < 0$

2. Pour la diode passante : $u_c(t) = e(t)$.

3. La diode étant bloquante, on se retrouve avec une association série RC isolée de l'amont. Le condensateur se décharge dans la résistance et la tension vérifie l'équation différentielle :

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme : $u_c(t) = u_0 e^{-t/\tau}$ avec $\tau = RC$.

4. Une fois le condensateur chargé sous l'amplitude de la tension d'entrée, la valeur de la tension d'entrée décroît et la diode devient bloquante, le condensateur se décharge alors dans la résistance en une durée caractéristique τ et ceci tant que la diode reste bloquante.

La diode redevient passante quand la tension à ses bornes s'annule à nouveau, intersection de la courbe représentant la tension d'entrée et de la courbe associée au condensateur, la tension aux bornes du condensateur est alors à nouveau égale à la tension d'entrée.

Pour $T \gg \tau$, le condensateur a le temps de se décharger significativement ; dans le cas contraire, la tension du condensateur reste quasiment constante égale à l'amplitude du signal d'entrée d'où le nom de **détecteur de crête**.

5. Dans tous les cas $T_p = 0,20$ ms et $T_m = 2,0$ ms.

→ Expérience 1 : $\tau = RC = 51 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-9} \simeq 1,0$ ms $> T_p$. Le condensateur n'a pas le temps de se décharger à l'échelle de la porteuse ; en revanche $\tau < T_m$, **la tension du condensateur parvient à suivre les évolutions de la modulante** même s'il reste une légère ondulation en dents de scie. On récupère bien le signal de la modulante.

→ Expérience 2 : $\tau = RC = 51 \times 10^3 \times 4 \times 10^{-9} \simeq 0,2$ ms. La constante de temps est de l'ordre de T_p . **Le condensateur a tendance à trop se décharger pendant une oscillation de la porteuse.**

→ Expérience 3 : $\tau = RC = 51 \times 10^3 \times 210 \times 10^{-9} \simeq 10$ ms $> T_m$.

La constante de temps est trop grande et ne permet pas au condensateur de se décharger à l'échelle des variations de la modulante.

La tension du condensateur ne suit plus les oscillations de la modulante.

Elec063. Filtrage numérique (***)

1. Pour ce système du premier ordre, l'équation différentielle est :

$$\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e$$

2. Intégrons membre à membre cette égalité vraie $\forall t$, entre $t = kT_e$ et $t = (k+1)T_e$:

$$\tau \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} \frac{dv_s}{dt} dt + \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} v_s dt = \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} v_e dt$$

$$\tau [v_s((k+1)T_e) - v_s(kT_e)] + \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} v_s dt = \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} v_e dt$$

On en déduit :

$$v_s[k+1] = v_s[k] + \frac{1}{\tau} \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} (v_e(t) - v_s(t)) dt$$

3. Méthode des trapèzes : $\int_{kT_e}^{(k+1)T_e} f(t) dt = [f((k+1)T_e) + f(kT_e)] \frac{T_e}{2}$.

En appliquant cette méthode, avec $f((k+1)T_e) = f[k]$, on en déduit :

$$v_s[k+1] = v_s[k] + \frac{1}{\tau} \left[\frac{(v_e[k+1] + v_e[k])T_e}{2} - \frac{(v_s[k+1] + v_s[k])T_e}{2} \right]$$

On regroupe alors les termes :

$$v_s[k+1] = v_s[k] \frac{1 - T_e/2\tau}{1 + T_e/2\tau} + \frac{T_e/2\tau}{1 + T_e/2\tau} (v_e[k] + v_e[k+1])$$

C'est à dire $A = \frac{1 - T_e\omega_c/2}{1 + T_e\omega_c/2}$ et $B = \frac{T_e\omega_c/2}{1 + T_e\omega_c/2}$.

4. Proposition de script :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# on fournit les valeurs numériques

fe=1200.
Te=1/fe
N=2048
amp=5.
f1=40
f2=460
```

```

fc=100.
wc=2*np.pi*fc
A=(1-wc*Te/2)/(1+wc*Te/2)
B=wc*Te/(2*(1+wc*Te/2))

# definition du signal en entree avec def
def entree(t):
    return amp*(np.sin(2*np.pi*f1*t)+np.sin(2*np.pi*f2*t))

# echantillons temporel et d'entree
list_t=np.arange(0.,N*Te,Te)
ve=[entree(t) for t in list_t]

# calcul du signal de sortie
vs=np.zeros(N)
for k in range(N-1):
    vs[k+1]=A*vs[k]+B*(ve[k]+ve[k+1])

# trace des courbes
plt.clf()
plt.subplot(211)
plt.plot(list_t,ve,label='$v_e$')
plt.legend()
plt.xlim(0,0.5)
plt.subplot(212)
plt.plot(list_t,vs,label='$v_s$')
plt.xlabel('$t$ (s)')
plt.legend()
plt.xlim(0,0.5)
plt.savefig('filtre_num1.pdf')

```

5. La fréquence d'échantillonnage est bien adaptée :

- * $f_e > 2 \times 460$ Hz (Critère de Shannon)
- * $T_e \ll \tau$, le calcul de l'intégrale par la méthode des trapèzes est acceptable.

Comme attendu le filtre passe-bas à 100 Hz préserve la basse fréquence et supprime presque totalement le signal haute fréquence. Ceci est clairement visible sur les représentations temporelle et spectrale.

6. Le critère de Shannon n'est pas respecté : $f_e < 2 \times 460$ Hz, on observe un repliement de la raie haute fréquence par rapport à $f_e/2 = 275$ Hz avec

l'apparition d'une **raie parasite** à $275 - (460 - 275) = 90$ Hz. Le filtre de fréquence de coupure 100 Hz n'agit pas (ou peu) sur cette raie à 90 Hz qui est toujours présente en sortie du filtre.

