

Détection boucle inductive (Air 2005, correction)

I.A Courants de Foucault, effet de peau

1. Avec $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, on en déduit en ordre de grandeur :

$$\frac{j_d}{j} = \frac{\varepsilon_0 \omega E}{\gamma E} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} = \frac{8,85 \times 10^{-12} \times 2\pi \times 50 \times 10^3}{4 \times 10^7} = 7 \times 10^{-14} \ll 1$$

Dans la suite, on peut donc, dans le métal, négliger le courant de déplacement par rapport au courant de charge.

2. Dans l'ARQS :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

En combinant les équations, on en déduit :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On en déduit :

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3. Les ondes électromagnétiques pénètrent peu dans les métaux et ceci d'autant plus que la fréquence est élevée. L'onde électromagnétique se localise à la surface du métal, on parle d'**effet de peau**.

En notant L la longueur caractéristique et T le temps caractéristique, l'équation s'écrit en ordre de grandeur :

$$\frac{B}{L^2} = \mu_0 \gamma \frac{B}{T} = \mu_0 \gamma f B \quad \Rightarrow \quad L^2 = \frac{1}{\mu_0 \gamma f}$$

Application numérique :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \gamma f}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 4 \times 10^7 \times 50 \times 10^3}} \quad \Rightarrow \quad \delta = 0,6 \text{ mm}$$

4. En reportant l'expression proposée dans l'équation de diffusion :

$$-\underline{k}^2 = \mu_0 \gamma i \omega \quad \Rightarrow \quad \underline{k}^2 = -\mu_0 \gamma \omega i = \mu_0 \gamma \omega e^{-i\pi/2}$$

En considérant la racine, on en déduit :

$$\underline{k} = \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} e^{-i\pi/4} \quad \Rightarrow \quad \underline{k} = \pm \left(\frac{1-i}{\delta} \right)$$

5. Pour déterminer le vecteur courant, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'ARQS :

$$\underline{j} = \frac{1}{\mu_0} \times (-i \underline{k} \wedge \underline{B}) = \frac{-i}{\mu_0} \underline{k} \underline{u}_z \wedge B_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \underline{u}_x = -\frac{1+i}{\mu_0 \delta} B_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \underline{u}_y$$

$$\underline{j} = -\frac{B_0 \sqrt{2}}{\mu_0 \delta} e^{i\pi/4} e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \underline{u}_y \quad \Rightarrow \quad \underline{j} = -\frac{B_0 \sqrt{2}}{\mu_0 \delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) e^{-z/\delta} \underline{u}_y$$

L'expression du vecteur courant permet d'évaluer sa divergence :

$$\operatorname{div} \underline{j} = \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0$$

De la loi d'Ohm locale, on en déduit : $\gamma \operatorname{div} \vec{E} = 0$, ce qui entraîne (Maxwell-Gauss) $\rho = 0$.

6. De façon générale, la puissance volumique cédée par le champ aux charges s'écrit $p_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$. Compte tenu de la loi d'Ohm locale, on en déduit en moyenne :

$$P_v = \langle p_v \rangle = \left\langle \frac{j^2}{\gamma} \right\rangle = \frac{2B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma} e^{-2z/\delta} \left\langle \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rangle \Rightarrow P_v = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma} e^{-2z/\delta}$$

En intégrant sur l'ensemble du demi-espace sur une section droite S , on obtient la puissance totale dissipée dans le matériau :

$$P_{tot} = \frac{B_0^2 S}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma} \int_{z=0}^{\infty} e^{-2z/\delta} dz \quad \Rightarrow \quad P_{tot} = \frac{B_0^2 S}{2\mu_0^2 \delta \gamma}$$

Ce qui donne pour la puissance surfacique :

$$P_\sigma = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \delta \gamma} \quad \Rightarrow \quad P_\sigma = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2} \sqrt{\frac{\mu_0 \pi f}{\gamma}}$$

I.B Coefficients d'inductance

7. Pour la boucle inductive et compte tenu de l'inductance mutuelle :

$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Pour le véhicule, en appelant u_2 la tension au bornes de la bobine définie en convention récepteur :

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

En reportant dans la première équation :

$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$$

On en déduit : $q = \frac{M^2}{L_1 L_2}$.

I.C Oscillateur électrique

8. De part la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{xR'}{xR' + (1-x)R'}\underline{v} \Rightarrow \boxed{\underline{u} = x\underline{v}}$$

Les condensateurs sont en série, les inverses des capacités s'ajoutent :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_a C_b}{C_a + C_b}$$

L'interrupteur étant ouvert, les condensateurs et la bobine sont en parallèles, on peut déterminer la résistance équivalente :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{jL(q)\omega \times 1/(jC_{eq}\omega)}{jL(q)\omega + \frac{1}{jC_{eq}\omega}} = \frac{jL(q)\omega}{1 - L(q)C_{eq}\omega^2}$$

On appelle \underline{w}_1 , la tension aux bornes de l'inductance. Grâce à la formule du pont diviseur de tension pour la résistance R et l'impédance équivalente :

$$\frac{\underline{w}_1}{\underline{v}} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{R + \underline{Z}_{eq}} \Rightarrow \frac{\underline{w}_1}{\underline{v}} = \frac{1}{1 + \frac{R(1 - L(q)C_{eq}\omega^2)}{jL(q)\omega}} = \frac{1}{1 + j\left(RC_{eq}\omega - \frac{R}{L(q)\omega}\right)}$$

La formule du pont diviseur de tension appliquée au niveau des condensateurs s'écrit :

$$\underline{w} = \frac{\frac{1}{jC_b\omega}}{\frac{1}{jC_a\omega} + \frac{1}{jC_b\omega}}\underline{w}_1 \Rightarrow \underline{w} = \frac{C_a}{C_a + C_b}\underline{w}_1$$

Avec $\underline{u} = x\underline{v}$ et $\underline{w} = \frac{C_a}{C_a + C_b}\underline{w}_1$, on en déduit :

$$\frac{\underline{w}}{\underline{u}} = \frac{\frac{C_a}{C_a + C_b} \times \frac{1}{x}}{1 + j[R C_{eq}\omega - R/(L(q)\omega)]}$$

Avec par identification : $Q/\Omega = RC_{eq}$ et $\Omega Q = R/L(q)$, c'est à dire :

$$\boxed{\Omega^2 = \frac{1}{L(q)C_{eq}}} ; \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C_{eq}}{L(q)}}} ; \quad \boxed{C_{eq} = \frac{C_a C_b}{C_a + C_b}} \quad \text{et} \quad \boxed{H_0 = \frac{1}{x} \frac{C_a}{C_a + C_b}}$$

9. Partons de la fonction de transfert :

$$\underline{w} \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega} \right) \right] = H_0 \underline{u} \quad \xRightarrow{\times j\omega} \quad j\omega \underline{w} + (j\omega)^2 \frac{Q}{\Omega} \underline{w} + Q\Omega \underline{w} = H_0 j\omega \underline{u}$$

Expression que l'on peut réécrire dans l'espace temporel :

$$\boxed{\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{\Omega}{Q} \frac{dw}{dt} + \Omega^2 w = \frac{\Omega H_0}{Q} \frac{du}{dt}}$$

C'est à dire $a = \frac{\Omega}{Q}$, $b = \Omega^2$ et $c = \frac{\Omega H_0}{Q}$.

10. On ferme l'interrupteur K , on a alors $w = u$. Le courant étant nul à l'entrée non inverseuse, fermer l'interrupteur ne modifie pas les équations précédemment obtenues.

L'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + (a - c) \frac{dw}{dt} + bw = 0$$

L'oscillation sinusoïdale nécessite $a = c$, c'est à dire :

$$\frac{\Omega}{Q} = \frac{\Omega}{Q} \times \frac{1}{x_0} \left(\frac{C_a}{C_a + C_b} \right) \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{C_a}{C_a + C_b}}$$

L'oscillation se fait à la pulsation Ω telle que :

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{L(q)C_{eq}}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_{eq}(1-q)}} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_{eq}}}(1-q)^{-1/2}$$

On en déduit :

$$\boxed{\Omega \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{q}{2} \right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_{eq}}}}$$

11. L'apparition des oscillations nécessite un système légèrement instable, c'est à dire $a < c$:

$$\frac{\Omega}{Q} < \frac{\Omega}{Q} \times \frac{1}{x} \left(\frac{C_a}{C_a + C_b} \right) \Rightarrow \boxed{x < x_0}$$

12. L'amplitude des oscillations est limitée par la *saturation en tension de l'ALI*.

I.D Détection électronique de la variation de fréquence

L'objectif de ce montage est de convertir la variation de fréquence en une variation de tension, c'est un **convertisseur fréquence-tension**.

13. Le montage à amplificateur opérationnel placé entre D et E est un **montage suiveur**. L'objectif est de récupérer le signal w sans affecter l'oscillateur électrique.

14. Le montage entre E et F est un montage intégrateur. On applique la loi des nœuds à l'entrée inverseuse :

$$\frac{V_E - V_-}{R_1} = \frac{V_- - V_F}{1/(jC_1\omega(q))}$$

Pour un ALI idéal fonctionnant en régime linéaire : $\underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0$, ce qui donne :

$$\frac{V_E}{R_1} = -V_F j C_1 \omega(q)$$

c'est à dire pour les amplitudes réelles :

$$E_F = \frac{E_0}{R_1 C_1 \omega(q)} = \frac{\omega_1}{\omega(q)} E_0$$

15. Le montage entre E et F' est un montage dérivateur. On applique la loi des nœuds à l'entrée inverseuse :

$$\frac{V_E}{1/j C_1 \omega(q)} = \frac{-V_{F'}}{R_1}$$

C'est à dire pour les amplitudes réelles :

$$E_{F'} = \frac{\omega(q)}{\omega_1} E_0$$

16. La diode sert à redresser le signal, le condensateur assure que la tension en G se maintient au niveau de l'amplitude du signal en F à condition que la constante de temps $R_2 C_2$ associée à la décharge du condensateur soit très grande vis à vis de la période du signal $T = 2\pi/\omega(q)$.
17. Avec une diode en inverse, la diode sera passante pour un potentiel $V_{F'} < V_{G'}$, dans les mêmes conditions que précédemment on obtient $V_{G'} = -E_{F'}$.
18. Le dernier montage est un montage sommateur inverseur, en appliquant la loi des nœuds à l'entrée inverseuse, on obtient :

$$\frac{V_G}{R_2} + \frac{V_{G'}}{R_2} + \frac{V_0}{yr} - \frac{V_0}{(1-y)r} = -\frac{V_H}{R_3} \Rightarrow V_H = -R_3 \left[\frac{E_F}{R_2} - \frac{E_{F'}}{R_2} + \frac{V_0(1-2y)}{y(1-y)r} \right]$$

Avec $E_F = \frac{E_0 \omega_1}{\omega(q)}$ et $E_{F'} = \frac{E_0 \omega(q)}{\omega_1}$, on obtient :

$$V_H = -R_3 \left[\frac{E_0}{R_2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0(1+q/2)} - \frac{\omega_0(1+q/2)}{\omega_1} \right) + \frac{V_0(1-2y)}{y(1-y)r} \right]$$

$$V_H = -R_3 \left[\frac{E_0}{R_2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} (1-q/2) - \frac{\omega_0(1+q/2)}{\omega_1} \right) + \frac{V_0(1-2y)}{y(1-y)r} \right]$$

On en déduit :

$$V_H = -\frac{R_3 E_0}{R_2} \left[\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right] - \frac{R_3 V_0 (1-2y)}{y(1-y)r} + \frac{R_3 E_0}{2R_2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) \times q$$

19. La relation entre la tension de sortie et le paramètre q est de la forme : $V_H = a + b \times q$. Le réglage du paramètre y permet de supprimer la constante

est d'obtenir une amplitude de tension proportionnelle à la fluctuation de fréquence :

$$V_H = \frac{R_3 E_0}{2R_2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) \times q$$

Les télescopes infrarouges (CS MP 2014, correction)

I. Détection de rayonnement infrarouge

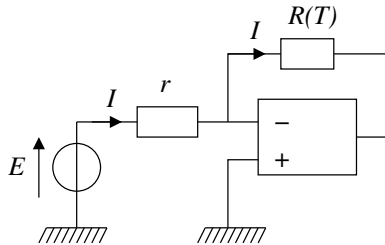
I.A - Généralités

1. Pour détecter des ondes lumineuses, on peut, par exemple, utiliser une photodiode ou une photorésistance.
Pour détecter des ondes thermiques, on peut utiliser une caméra thermique.
2. Les rayonnements infrarouge correspondent à des longueurs d'onde supérieures à celles du rouge et s'étendent jusqu'au millimètre, c'est à dire $[0,8 \mu\text{m}, 1,0 \text{mm}]$.
3. Dans la loi de Wien, la grandeur λ_{max} représente la longueur d'onde associée au maximum d'éclairement et T désigne la température de surface du corps. Ainsi une étoile bleue est plus chaude qu'une étoile rouge.
4. D'après la loi de Wien : pour une température de 300 K, la longueur d'onde la plus émise est de l'ordre de $10 \mu\text{m}$, pour une température de 30 K, la longueur d'onde la plus émise est de l'ordre de 0,1 mm. Dans les deux cas, si l'on ne refroidit pas les détecteurs, ils émettent des rayonnements infrarouges qui risquent de perturber la mesure de rayonnements infrarouges venus de l'espace.

Il est donc nécessairement de refroidir les détecteurs à des températures de l'ordre du kelvin pour limiter leur propre rayonnement infrarouge.

I.B - Principe du bolomètre

1. Considérons des éléments simples disponibles en salle de TP : un générateur continu de tension, un ALI et son alimentation et une résistance r , en plus du bolomètre modélisé par la résistance $R(T)$. On peut proposer le montage suivant qui réalise une **transformation tension-courant** :



Pour un ALI idéal, le potentiel de la borne inverseuse est égal au potentiel de la borne non-inverseuse connectée à la masse. La loi d'Ohm conduit à :

$$E = rI \Leftrightarrow I = \frac{E}{r}$$

En réglant la tension E et la résistance r , on peut choisir l'intensité, on a bien réalisé un générateur de courant. Notons que l'intensité I est indépendante de la résistance du bolomètre !

2. Réalisons un bilan thermique pour le bolomètre entre deux instants voisins t et $t + dt$:
 → puissance thermique reçue par rayonnement : Φ_i
 → puissance reçue par effet Joule : $R(T)I^2$
 → puissance cédée à la poutre : $G_{th}(T - T_s)$

Ce qui donne, avec C_{th} la capacité du bolomètre :

$$C_{th}dT = [R_0 + \alpha R_0(T - T_s)]I^2 + \Phi_i - G_{th}(T - T_s) dt$$

et donc, pour l'équation différentielle :

$$\frac{C_{th}}{-\alpha R_0 I^2 + G_{th}} \frac{dT}{dt} + T = \frac{\Phi_i + R_0(1 - \alpha T_s)I^2 + G_{th}T_s}{-\alpha R_0 I^2 + G_{th}}$$

C'est à dire :

$$\tau = \frac{C_{th}}{-\alpha R_0 I^2 + G_{th}} \quad \text{et} \quad \beta(\Phi_i) = \frac{\Phi_i + R_0 I^2}{-\alpha R_0 I^2 + G_{th}} + T_s$$

Notons que nous avons utilisé la notion de résistance thermique qui est au départ définie en régime permanent. On se place ici dans le cadre de l'ARQS en supposant que la température dans la poutre se met immédiatement à l'équilibre vis à vis du temps d'évolution thermique du bolomètre.

3. Avec un coefficient $\alpha < 0$, les coefficients de l'équation homogène sont de même signe et le système est stable.

4. En régime permanent $T_p(\Phi_i) = \beta(\Phi_i) = \frac{\Phi_i + R_0 I^2}{-\alpha R_0 I^2 + G_{th}} + T_s$.

I.C - Temps de réponse du bolomètre

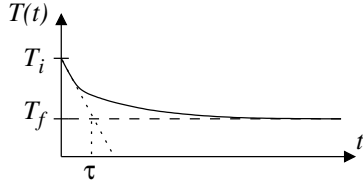
1. En l'absence de flux Φ_i , l'équation différentielle prend la forme :

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = T_s + \frac{R_0 I^2}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$$

Compte tenu de la condition initiale $T(0) = T_i$, la solution est de la forme :

$$T(t) = T_f + Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad T(0) = T_i \quad \text{et} \quad T_f = T_s + \frac{R_0 I^2}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$$

C'est à dire : $T(t) = T_f + (T_i - T_f)e^{-t/\tau}$



2. La capacité thermique est associée à l'inertie thermique du système, une plus grande capacité thermique augmente le temps caractéristique de retour à l'équilibre.

Pour une plus grande conductance thermique, les échanges thermiques sont favorisés entre la source froide et le bolomètre, le retour à l'équilibre est plus rapide.

I.D - Sensibilité du bolomètre

1. Avec $\Phi_i(t) = \Phi_{i0} + \varphi_0 \cos(\omega t)$, l'équation différentielle prend la forme :

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = T_i + \frac{\varphi_0}{G_{th} - \alpha R_0 I^2} \cos(\omega t) \Rightarrow \tau \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{\varphi_0}{G_{th} - \alpha R_0 I^2} \cos(\omega t)$$

C'est à dire, dans le domaine fréquentiel :

$$j\omega\theta + \theta = \frac{\varphi_0}{G_{th} - \alpha R_0 I^2} \Rightarrow \theta = \frac{A}{1 + j\omega\tau}$$

Ce qui donne pour le module :

$$\theta_0 = \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad \text{avec} \quad A = \frac{\varphi_0}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$$

2. La tension aux bornes du bolomètre s'écrit :

$$u = R(T)I = (R_0 + \alpha R_0 [T - T_s]) I = (R_0 + \alpha R_0 [T_i - T_s]) I + \alpha R_0 \theta(t) I$$

C'est à dire pour l'amplitude de la partie variable :

$$V_0 = \frac{|\alpha| R_0 I A}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

3. Sensibilité du dispositif :

$$S(\omega) = \frac{V_0}{\varphi_0} \Rightarrow S(\omega) = \frac{|\alpha| R_0 I}{G_{th} - \alpha R_0 I^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

4. On est en présence d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $\omega_c = 1/\tau$ avec $S_{dB}^{max} = \frac{|\alpha| R_0 I}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$.

5. Pour ce filtre passe-bas du premier ordre, si les fréquences d'excitation sont supérieures à la fréquence de coupure, le système n'est plus en mesure de suivre les fluctuations de flux thermique et la sensibilité se dégrade.

6. Pour augmenter la sensibilité à basse fréquence, il faut diminuer la conductance ce qui s'oppose au gain en rapidité.

V. Refroidissement cryogénique du télescope Herschel

V.A - Principe d'un interrupteur thermique

1. On applique le premier principe au gaz compris entre deux cylindres de rayon r et $r + dr$ de longueur L entre deux instants voisins t et $t + dt$:

$$\rho c r \times 2\pi r dr \times L \times dT = [j_Q(r) \times 2\pi r \times L - j_Q(r + dr) \times 2\pi(r + dr) \times L] dt$$

$$\Leftrightarrow \rho c r dr \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \frac{\partial [j_Q(r)r]}{\partial r} dr dt$$

À l'aide de la loi de Fourier appliquée à flux thermique radial, on obtient finalement :

$$\rho c r \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

2. En régime permanent l'équation précédente se simplifie selon :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{\partial T}{\partial r} = A \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{A}{r} \Rightarrow T(r) = A \ln r + B$$

Les conditions aux limites imposent : $T(R_1) = T_i$ et $T(R_2) = T_c$:

$$T_i = A \ln R_1 + B \quad \text{et} \quad T_c = A \ln R_2 + B$$

La résolution de ce système conduit à :

$$A = \frac{T_c - T_i}{\ln(R_2/R_1)} \quad \text{et} \quad B = \frac{T_i \ln R_2 - T_c \ln R_1}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$T(r) = \frac{T_c - T_i}{\ln(R_2/R_1)} \ln r + \frac{T_i \ln R_2 - T_c \ln R_1}{\ln(R_2/R_1)} \Rightarrow T(r) = T_i + (T_c - T_i) \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$

3. Le vecteur courant traverse l'aire latérale du cylindre $2\pi r h$:

$$\Phi = \iint_{lat.} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = \iint_{lat.} j_Q(r) dS = j_Q(r) \times 2\pi r \times h = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 2\pi r h$$

$$\Phi = -\lambda \times \frac{T_c - T_i}{\ln(R_2/R_1)} \times \frac{1}{r} \times 2\pi r \times h \Rightarrow \Phi = -\lambda \times \frac{T_c - T_i}{\ln(R_2/R_1)} \times 2\pi h$$

Notons que le flux thermique est négatif, ceci s'explique par une température extérieure supérieure à la température intérieure.

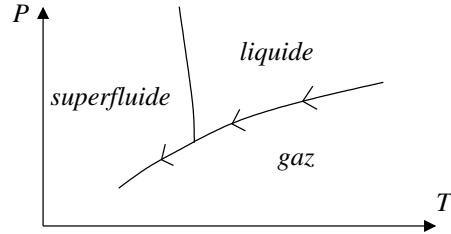
4. La conductance thermique est l'inverse de la résistance thermique :

$$G = \frac{\Phi}{T_i - T_c} \Rightarrow \boxed{G = \frac{2\pi\lambda h}{\ln(R_2/R_1)}}$$

5. En jouant sur la valeur de h , armature intérieure plus ou moins enfoncée, on passe d'un interrupteur ouvert (armature intérieure sortie, $h = 0$, conductance nulle) à un interrupteur fermé (h maximale, conductance maximale).

V.B - Choix du fluide réfrigérant

1. Le liquide étant en équilibre avec sa vapeur, **l'évolution du système se fait le long de la courbe de vapeur saturante**, pression d'équilibre entre le gaz et le liquide.



2. On constate que l'hélium peut rester à l'état fluide « superfluide » jusqu'à température nulle ; habituellement le corps pur finit par se solidifier.

La phase « superfluide » est une phase fluide de viscosité nulle.

3. On considère un système liquide de masse $m(t)$. À l'instant $t + dt$, la masse de liquide vaut $m(t + dt) = m(t) + dm$, il y a donc une masse $-dm$ de vapeur qui se forme pendant la durée dt .

En considérant ce système isolé, l'énergie nécessaire à la vaporisation de liquide va être prise sur l'énergie thermique du liquide. L'enthalpie du système se conserve.

$$m(t)c_{liq}dT + (-dm) \times l_{vap} = 0 \Leftrightarrow dT = \frac{l_{vap}}{c_{liq}} \frac{dm}{m}$$

Partant d'une température T_0 et d'une masse m_0 , on intègre l'équation jusqu'à une température $T(t)$ et une masse $m(t)$:

$$\int_{T_0}^{T(t)} dT = \frac{l_{vap}}{c_{liq}} \int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m} \Rightarrow \boxed{T(t) = T_0 + \frac{l_{vap}}{c_{liq}} \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)}$$

4. En considérant la capacité thermique voisine pour les deux isotopes, le refroidissement est plus efficace pour l'isotope de plus grande enthalpie de vaporisation, c'est à dire l'hélium 4He .

5. En supposant que la courbe représente la pression en pascal (et non en bar comme indiqué). La température limite vaut respectivement :

$$T_{^3He} \simeq 0,2 \text{ K} \quad \text{et} \quad T_{^4He} \simeq 0,7 \text{ K}$$

D'après ce critère l'hélium 3He est plus adapté au refroidissement cryogénique.

V.C - Fonctionnement du cryo-réfrigérateur

1. On note T_f la température finale atteinte et $\Delta T = T_0 - T_f > 0$. En inversant la relation donnant la température en fonction de la masse, on obtient :

$$m(t) = m_0 \exp\left(-\frac{c_{liq}\Delta T}{l_{vap}}\right)$$

La masse évaporée est la différence entre la masse initiale de liquide et la masse encore présente à l'instant t :

$$\boxed{m_{\text{evap}} = m_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{c_{liq}\Delta T}{l_{vap}}\right)\right]}$$

2. La chaleur extraite est le produit de l'enthalpie massique de changement d'état par la masse évaporée :

$$\boxed{Q_{\text{extract}} = m_0 l_{vap} \left[1 - \exp\left(-\frac{c_{liq}\Delta T}{l_{vap}}\right)\right]}$$

Impact d'un bolide avec la Terre (CS, PSI, 2012)

I - Collision entre un bolide et la Terre

A - Vitesse orbitale de la Terre

- Un référentiel galiléen est **un référentiel dans lequel la première loi de Newton est vérifiée**.
- Si les corps sont à symétrie sphérique, on peut montrer que la force de gravitation entre les corps est la même que si toute la masse était concentrée au centre du corps (théorème de Gauss gravitationnel), on peut alors traiter les corps comme ponctuels.
Si la masse du Soleil est très grande devant celle de la Terre, on peut considérer que le Soleil est fixe et on se ramène, dans le référentiel de Kepler supposé galiléen, au mouvement de la Terre soumis à une force centrale.
- Pour un mouvement à force centrale, la conservation du moment cinétique impose la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$; le mouvement de la Terre étant supposé circulaire $r = R_0$, ceci assure que $\dot{\theta}$ est constant au cours du mouvement; la Terre parcourt donc sa trajectoire circulaire à un rythme uniforme.

On applique alors la relation fondamentale à la Terre dans le référentiel de Kepler :

$$M_T \vec{a} = -\frac{GM_s M_T}{R_0^2} \vec{u}_r \Rightarrow -\frac{v_T^2}{R_0} = -\frac{GM_s}{R_0^2} \quad \boxed{v_T = \sqrt{\frac{GM_s}{R_0}}}$$

Application numérique : $v_T = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 2,00 \times 10^{30}}{1,5 \times 10^{11}}} \simeq \boxed{30 \text{ km.s}^{-1}}$

B - Vitesse d'impact du bolide

- On applique la loi de composition des vitesses pour deux référentiels en translation; dans le cas général :

$$\vec{v}_{Kep} = \vec{v}_{Geo} + \vec{v}_e$$

Dans le référentiel de Kepler, la vitesse du bolide est $\vec{v}_{Kep} = \vec{v}_b$; dans le référentiel géocentrique, la vitesse du bolide est $\vec{v}_{Geo} = \vec{v}_r$; la vitesse d'entraînement est la vitesse du référentiel géocentrique par rapport au référentiel de Kepler $\vec{v}_e = \vec{v}_T$.

La formule générale appliquée à ce cas particulier donne :

$$\vec{v}_b = \vec{v}_r + \vec{v}_T \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{v}_r = \vec{v}_b - \vec{v}_T}$$

Les cas limites correspondent aux cas de vecteurs vitesse de même sens ou de sens opposé :

$$\boxed{v_r^{min} = v_b - v_T = 30 - 30 = 0 \text{ km.s}^{-1}}$$

$$\boxed{v_r^{max} = v_b + v_T = 60 \text{ km.s}^{-1}}$$

- L'énergie mécanique du corps est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\boxed{E_M = \frac{1}{2} m_b v^2 - \frac{GM_T m_b}{r} = \frac{1}{2} m_b v_r^2 > 0}$$

L'énergie mécanique est une constante du mouvement (la force est conservative), comme la vitesse vaut $v_r \neq 0$ à l'infini, l'énergie mécanique est strictement positive et la trajectoire est donc une hyperbole.

- Étude du moment cinétique :

- La force étant centrale, le théorème du moment cinétique assure que le moment cinétique du bolide est une constante du mouvement.

* évaluons la norme du moment cinétique au point A :

$$\sigma_A = |\vec{OA} \wedge m\vec{v}_A| = m d_{min} v_A$$

* évaluons la norme du moment cinétique au point M_0 :

$$\sigma_A = |\vec{OM}_0 \wedge m\vec{v}_r| = m b v_r \quad (\text{bras de levier})$$

La comparaison des deux expressions conduit à : $\boxed{d_{min} v_A = b v_r}$

- Utilisons la conservation de l'énergie mécanique en évaluant cette grandeur en M_0 et en A :

$$E_M = \frac{1}{2} m_b v_r^2 = \frac{1}{2} m_b v_A^2 - \frac{GM_T m_b}{d_{min}}$$

En utilisant la relation $d_{min} v_A = b v_r$, on en déduit l'équation du second degré vérifiée par d_{min} :

$$d_{min}^2 + \frac{2GM_T}{v_r^2} d_{min} - b^2 = 0$$

On conserve la racine positive :

$$\boxed{d_{min} = -\frac{GM_T}{v_r^2} + \sqrt{\left(\frac{GM_T}{v_r^2}\right)^2 + b^2}}$$

- La relation précédente indique que la distance minimale est une fonction croissante de b .

On s'intéresse au cas critique et on cherche la valeur de b notée b_{max} pour laquelle $d_{min} = R_T$. Il est plus simple d'utiliser à nouveau l'équation du second degré pour ce cas limite :

$$R_T^2 + \frac{2GM_T}{v_r^2} R_T - b_{max}^2 = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{b_{max} = R_T \sqrt{1 + \frac{2GM_T}{R_T v_r^2}}}$$

- Vitesse à l'impact :

- (a) On applique à nouveau la conservation de l'énergie mécanique entre M_0 et juste avant l'impact :

$$\frac{1}{2}m_b v_i^2 - \frac{GM_T m_b}{R_T} = \frac{1}{2}m_b v_r^2 \quad \text{donc} \quad v_i^2 = v_r^2 + \frac{2GM_T}{R_T}$$

On en déduit :

$$v_i = \sqrt{v_r^2 + v_l^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{v_l^2 = \frac{2GM_T}{R_T}}$$

La vitesse v_l est la vitesse de libération, c'est à dire la vitesse qu'il faut donner à un objet lancé depuis la Terre pour qu'il puisse s'échapper de l'attraction terrestre et partir jusqu'à l'infini.

Le bolide décrit ici le mouvement inverse en convertissant son énergie potentielle en énergie cinétique.

Application numérique :

$$v_l = \sqrt{\frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{6,4 \times 10^6}} \Rightarrow \boxed{v_l \simeq 11,2 \text{ km.s}^{-1}}$$

- (b) Sachant que $0 \leq v_r \leq 60 \text{ km.s}^{-1}$:

$$\boxed{v_i^{min} = \sqrt{0 + 11,2^2} = 11,2 \text{ km.s}^{-1}} \quad \boxed{v_i^{max} = \sqrt{60^2 + 11,2^2} = 61 \text{ km.s}^{-1}}$$

III - Thermodynamique de la traversée de l'atmosphère

A - Puissance dissipée

La puissance est le produit de la force par la vitesse :

$$\mathcal{P} = F_t \times v = \frac{1}{2} C \rho \pi r_b^2 v^3$$

Application numérique :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1,2 \times \pi \times (80)^2 \times (20 \times 10^3)^3 \Rightarrow \boxed{\mathcal{P} = 1,9 \times 10^{17}}$$

La puissance est équivalente à celle de 100 millions de centrale nucléaire. Attention toutefois que la traversée de l'atmosphère ne dure que quelques secondes quand une centrale nucléaire peut fonctionner une bonne partie de l'année.

B - Vitesse du son dans l'air

1. L'approximation acoustique est une approximation de grande longueur d'onde. Les perturbations dues à la propagation de l'onde sont traitées à l'ordre 1 dans les calculs.

À l'aide de la relation de la dynamique appliquée à une tranche de fluide et de la conservation de la masse, on obtient, à l'ordre 1 (Cf. cours) :

$$\rho_e \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p_a}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_e \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Pour simplifier les expressions et dans le cadre du programme, on effectue les calculs à une dimension.

2. En négligeant la viscosité du fluide et les transferts thermiques (fluctuation plus rapide que les échanges thermiques) on peut considérer l'évolution adiabatique et réversible donc isentropique.

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \simeq \frac{1}{\rho_e} \frac{\delta \rho}{\delta p} \Rightarrow \boxed{\rho_a = \rho_e \chi_s P_a}$$

Dans le cas d'un gaz parfait, l'évolution adiabatique réversible assure la possibilité d'utiliser la loi de Laplace :

$$P \rho^{-\gamma} = cste \Rightarrow \frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \Rightarrow \boxed{X_s = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{\gamma P_e}}$$

La pression est choisie comme étant la pression d'équilibre car le calcul de la dérivée est effectuée au point d'équilibre.

3. Vitesse du son

- (a) En couplant les équations mécanique, de conservation de la masse et l'équation thermodynamique, on obtient l'équation de d'Alembert (Cf. cours) :

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_e \chi_s}}}$$

Compte tenu de l'expression du coefficient de compressibilité obtenu pour un gaz parfait :

$$c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_e \times 1/(\gamma P_e)}} \Rightarrow \boxed{c_a = \sqrt{\frac{\gamma P_e}{\rho_e}}}$$

- (b) Application numérique :

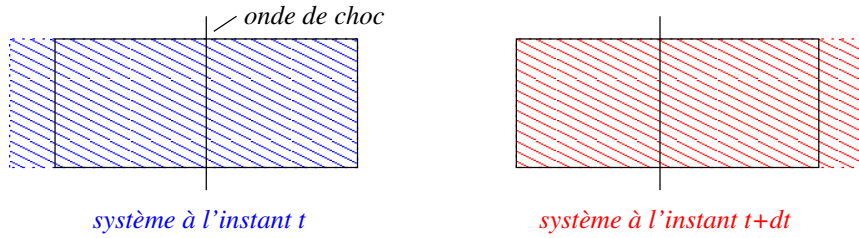
$$c_a = \sqrt{\frac{\gamma P_e}{\rho_e}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{air}}} = \sqrt{\frac{7 \times 8,31 \times 290}{5 \times 29 \times 10^{-3}}} \Rightarrow \boxed{c_a = 341 \text{ m.s}^{-1}}$$

C - Lois de conservation de l'écoulement, onde de choc

1. Nombre de Mach :

$$\mathcal{M}_1 = \frac{v_1}{c_1} = \frac{20 \times 10^3}{341} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_1 = 59}$$

2. Dans toute la suite, on considérera le système Σ^* comme la réunion à l'instant t du système contenu dans Σ et du fluide qui s'apprête à entrer dans le cylindre pendant dt :



Pendant dt , la masse qui entre dans la surface de contrôle doit en sortir pour maintenir un régime permanent dans le référentiel de l'onde de choc :

$$\rho_1 v_1 S dt = \rho_2 v_2 S dt \Rightarrow \boxed{\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (R_1)}$$

3. On applique, en projection selon l'axe du mouvement, un bilan de quantité de mouvement pour le système fermé précédemment défini. Le régime permanent assure que la quantité de mouvement au sein de la surface de contrôle est préservée :

$$d\vec{p} = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \delta\vec{p}_2 - \delta\vec{p}_1 = \rho_2 v_2 dt S \vec{v}_2 - \rho_1 v_1 dt S \vec{v}_1$$

Les forces s'identifient aux forces de pression en amont et en aval :

$$\rho_2 v_2 dt S v_2 - \rho_1 v_1 dt S v_1 = (P_1 S_1 - P_2 S_2) dt$$

$$\boxed{\rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2 = P_1 - P_2 \quad (R_2)}$$

4. Bilan d'énergie :

- (a) On utilise le premier principe industriel pour cet écoulement en régime permanent. En l'absence de travail utile ou de transfert thermique reçu par le système :

$$\Delta(h + e_c + e_p) = 0 \Rightarrow \boxed{h_2 + \frac{v_2^2}{2} = h_1 + \frac{v_1^2}{2} \quad (R_3)}$$

- (b) Pour un gaz parfait, l'enthalpie massique ne dépend que de la température

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) \Rightarrow \boxed{h_2 - h_1 = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) M_{air}} (T_2 - T_1)}$$

À l'aide de la formule des gaz parfaits, on en déduit :

$$h_2 - h_1 = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \left(\frac{RT_2}{M_{air}} - \frac{RT_1}{M_{air}} \right) \Rightarrow \boxed{h_2 - h_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) \quad (R_4)}$$

- (c) En combinant les relations (R₃) et (R₄), on obtient :

$$\boxed{\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) = \frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad (R_5)}$$

D - Caractérisation thermodynamique du gaz choqué

1. Le nombre de Mach est le rapport de la vitesse du fluide par la vitesse du son, attention que la variation de température entraîne une modification de la vitesse du son qui n'est pas égale à celle de la zone 1 :

$$\mathcal{M}_2 = \frac{v_2}{c_2} = \frac{v_2}{\sqrt{\gamma P_2 / \rho_2}} = v_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\gamma P_2}} = v_2 \sqrt{\frac{\rho_1}{\gamma P_2}} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{v_2}{v_1} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma}} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$$

En utilisant l'expression reliant les vitesses en amont et en aval, on en déduit :

$$\mathcal{M}_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{\gamma + 1}{\sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_2 = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \simeq 0,38 < 1}$$

L'écoulement en aval est **subsonique**.

2. On part de la formule du gaz parfait et on utilise le système d'équations admis :

$$T_2 = \frac{M_{air} P_2}{R \rho_2} = \frac{M_{air} P_2 \rho_1}{R \rho_1 \rho_2} = \frac{M_{air} 2v_1^2 \gamma - 1}{R \gamma + 1 \gamma + 1} \Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{2M_{air} v_1^2}{R} \times \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)^2}}$$

Application numérique :

$$T_2 = \frac{2 \times 29 \times 0,001 \times (20 \times 10^3)^2}{8,31} \times \frac{0,4}{2,4^2} \Rightarrow T_2 = 1,9 \times 10^5 \text{ K}$$

3. Le coefficient $\gamma = 7/5$ s'applique à un gaz diatomique, le gaz ionisé est constitué d'atomes et d'électrons, il serait préférable d'utiliser le $\gamma = 5/3$ d'un gaz monoatomique.

Une partie de l'énergie est utilisée pour ioniser les particules, la température réelle du gaz choqué est donc plus faible que la température calculée précédemment.

Lunette astronomique (CCP, PC, 2015)

B.1 - Principe de la lunette astronomique

1. L'œil n'accomode pas pour une **observation à l'infini**.

L'objet observé se trouve à l'infini (distance très grande vis à vis des distances focales), l'image intermédiaire réalisée par la lentille L_1 se forme au niveau du plan focal image de l'objectif.

Pour que l'œil n'accomode pas, l'image finale doit se situer à l'infini ; l'image intermédiaire, objet pour la seconde lentille, doit donc se situer dans le plan focal objet de la seconde lentille.

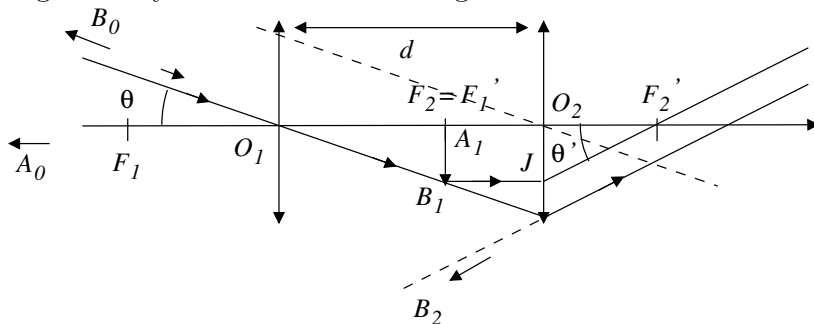
En conséquence **le foyer image de l'objectif doit être confondu avec le foyer objet de l'oculaire**.

Ce système est un système **afocal**. Les rayons issus de l'infini repartent à l'infini et ne convergent pas en un foyer.

2. Dans les conditions de Gauss, tous les rayons issus d'un point objet convergent en un unique point image. On parle de stigmatisme. Les conditions de Gauss correspondent à des **rayons paraxiaux**, rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique et proches de l'axe optique.

Les rayons incidents faisant un angle θ avec l'axe optique convergent en un point du plan focal image de l'objectif (le rayon passant par le centre optique n'est pas dévié, celui passant par le foyer objet ressort parallèle à l'axe optique).

L'image intermédiaire étant dans le plan focal objet de l'oculaire, les rayons émergent du système en faisant un angle θ' .



En raisonnant en valeur absolue et pour des petits angles :

$$\rightarrow \text{Triangle } O_1A_1B_1 : \theta = \frac{A_1B_1}{f_1}$$

$$\rightarrow \text{Triangle } O_2JF_2' : \theta' = \frac{O_2J}{f_2'} = \frac{A_1B_1}{f_2'}$$

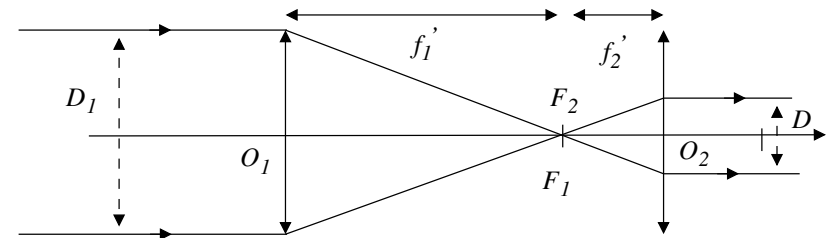
$$\text{On en déduit : } G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f_1'}{f_2'}$$

La focale de l'objectif doit être très supérieure à celle de l'oculaire pour espérer un grossissement important.

$$\text{Application numérique : } G = 50$$

B.2 - Diaphragme d'ouverture

On effectue le tracé des rayons extrêmes du faisceau :



La relation de Thalès conduit à :

$$\frac{D_1}{f_1'} = \frac{D}{f_2'} \Rightarrow D = \frac{f_2'}{f_1'} D_1 = \frac{D_1}{G}$$

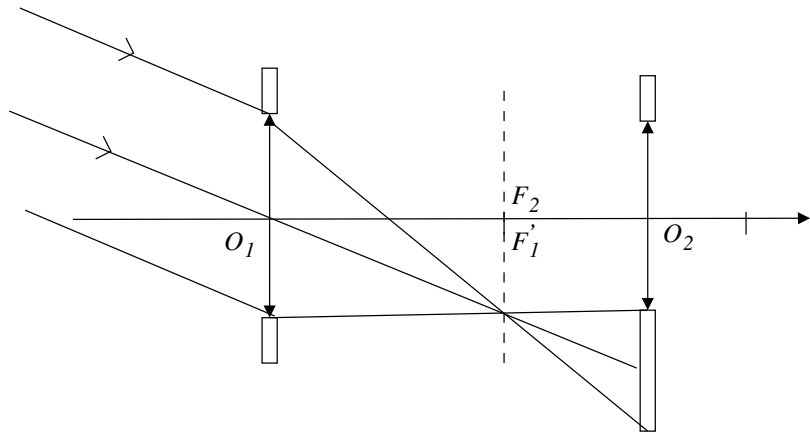
Application numérique :

$$D = \frac{10}{50} \Rightarrow D = 0,20 \text{ cm} = 2,0 \text{ mm}$$

$D < D_2$, c'est bien le diamètre de l'objectif qui limite le diaphragme d'ouverture.

B.3 - Diaphragme de champ

Pour des rayons trop inclinés de l'axe optique, aucun rayon issu de l'objet ne peut émerger de la lunette, la monture de l'oculaire limite le champ de la lunette.

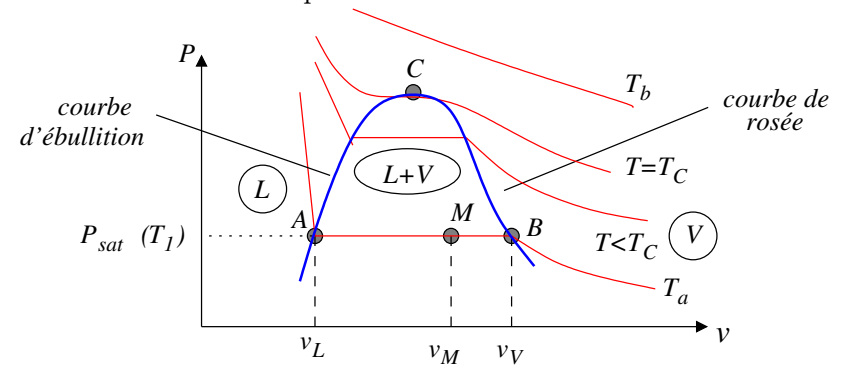


B.4 - Dispersion

L'indice optique dépend de la longueur d'onde, les différentes longueurs d'onde sont déviées différemment au sein du verre. On parle de **milieu dispersif**.

Pompe à chaleur géothermique (CCP, MP, 2014)

1. On s'intéresse à des compressions isothermes :



→ Pour $T_a < T_{crit}$: à basse pression, le système est sous forme vapeur, pour une compression isotherme d'un gaz parfait $Pv = cste$, la courbe est une portion d'hyperbole. Le point B correspond à l'apparition de la première goutte de liquide. Dans le domaine diphasique, la température impose la pression et l'isotherme devient horizontale (isobare). Au point A , la vapeur disparaît, le système est alors entièrement liquide et la compression isotherme suit une droite quasi-verticale traduisant le caractère quasi-incompressible des phases condensées.

→ Pour $T_b > T_{crit}$: au-delà du point critique C , on n'observe plus de changement d'état. Dans ce domaine, les modèles gaz parfait ou liquide incompressible ne s'appliquent plus.

La réunion de tous les points B définit la courbe de rosée (apparition du liquide en compression), la réunion de tous les points A constitue la courbe d'ébullition (apparition de la première bulle de vapeur en détente).

2. Enthalpie de changement d'état :

(a) $l_V(T) = h_V(T) - h_L(T)$, l'enthalpie massique de vaporisation est la différence des enthalpies massiques de la vapeur et du liquide à la température de changement d'état.

(b)
$$c_p = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$$

(c) L'enthalpie massique d'un gaz parfait ne dépend que de la température

(seconde loi de Joule) :
$$dh(T) = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} dT$$

3. Rendement d'une PAC

- (a) Le compresseur fournit un travail mécanique $w > 0$ qui permet d'effectuer le transfert thermique de la source froide vers la source chaude. Le fluide prélève de l'énergie à la source froide ($q_f > 0$) et cède de l'énergie à la source chaude ($q_c < 0$).

Dans le cas d'une pompe à chaleur, l'énergie utile est $-q_c$ (chauffer la source chaude, par exemple l'intérieur de la maison) et le coût est w , en conséquence :

$$e = \frac{-q_c}{w}$$

e est nécessairement positive et peut être supérieure à l'unité car l'énergie prélevée à la source froide est « gratuite ».

- (b) D'après le premier principe appliqué sur un cycle :

$$\Delta u = 0 = w + q_c + q_f$$

Le deuxième principe appliqué sur un cycle s'écrit :

$$0 = \Delta s \geq \frac{q_c}{T_c} + \frac{q_f}{T_f}$$

On peut alors reprendre l'expression de l'efficacité :

$$e = \frac{-q_c}{w} = \frac{-q_c}{-q_f - q_c} = \frac{1}{1 + q_f/q_c}$$

D'après le deuxième principe, en prenant garde que $q_c < 0$ pour les inégalités :

$$\frac{q_f}{T_f} \leq -\frac{q_c}{T_c} \Leftrightarrow \frac{q_f}{q_c} \geq -\frac{T_f}{T_c} \Leftrightarrow 1 + \frac{q_f}{q_c} \geq 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

On en déduit :

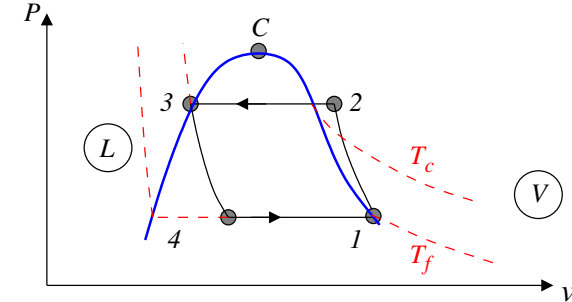
$$e \leq \frac{1}{1 - T_f/T_c} \Rightarrow e \leq e_C = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

L'égalité est obtenue dans le cas d'une évolution réversible (cycle de Carnot).

4. Allure du cycle :

- (a) L'allure du cycle est représentée ci-contre.
- (b) Le transfert thermique avec la source chaude est réalisée lors de l'étape (2) \rightarrow (3).
Le transfert thermique avec la source froide est réalisée lors de l'étape (4) \rightarrow (1).

- (c) Lors de l'étape (2) \rightarrow (3), c'est **l'intérieur de la maison** qui joue le rôle du thermostat.



5. Intérêt d'une PAC sur aquifère

- (a) Le travail massique est représenté par **l'aire du cycle** dans le diagramme de Clapeyron.
- (b) En augmentant la température T_f , on réduit l'aire du cycle et donc le travail w fourni.
Le point (2) se déplace légèrement mais le transfert thermique q_c est essentiellement associée au changement d'état (Cf. question suivante).
On peut donc considérer que q_c varie faiblement quand w varie significativement, l'efficacité $e = -q_c/w$ se trouve améliorer.
- (c) Une pompe à chaleur est utilisée en hiver pour réchauffer une maison ; l'hiver, la température du sol est plus élevée que celle de l'air ambiant ; en utilisant le sol comme source froide, on augmente T_f et on améliore l'efficacité.

6. Détermination de q_c

- (a) Pour l'évolution isentropique d'un gaz parfait, on applique la loi de Laplace :

$$P_f^{1-\gamma} T_f^\gamma = P_c^{1-\gamma} T_c^\gamma \Rightarrow T_2 = T_f \left(\frac{P_f}{P_c} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Application numérique :

$$T_2 = 288 \times \left(\frac{4,88}{13,2} \right)^{\frac{1-1,18}{1,18}} \Rightarrow T_2 = 335 \text{ K}$$

- (b) Lors de l'évolution isobare, la variation d'enthalpie s'identifie au transfert thermique. L'évolution (2) \rightarrow (3) se décompose en deux étapes, refroidissement de la vapeur jusqu'à l'apparition du liquide puis condensation isobare :

$$q_c = \Delta h = c_p(T_c - T_2) - l_V(T_c) \Rightarrow \boxed{q_c = -l_V(T_c) + \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)M}(T_c - T_2)}$$

Application numérique :

$$q_c = -(421,9 - 270,5) \times 10^3 + \frac{1,18 \times 8,31}{0,18 \times 0,102} \times (323 - 335) \Rightarrow$$

$$\boxed{q_c = -158 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

- (c) Le terme de condensation représente $q_c^{cond} = -151 \text{ kJ.kg}^{-1}$. L'essentiel du transfert thermique est associé au terme de changement d'état.

7. Titre en vapeur

- (a) La détente de Joule-Kelvin correspond à une détente sans apport de travail utile ou de transfert thermique. Le premier principe industriel conduit à $\Delta h = 0$. **L'enthalpie massique se conserve au cours de la transformation.**
- (b) Au point (3), le système est sous forme liquide, au point (4) le système est diphasé. En appelant x le titre en vapeur, la conservation de l'enthalpie massique s'écrit :

$$h_L(T_c) = xh_v(T_f) + (1 - x)h_L(T_f) \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{h_L(T_c) - h_L(T_f)}{h_v(T_f) - h_L(T_f)}}$$

Application numérique :

$$x = \frac{270,5 - 220,1}{405,6 - 220,1} \Rightarrow \boxed{x = 27\%}$$

- (c) $\boxed{q_f = (1 - x)l_V(T_f)}$, application numérique :

$$q_f = (1 - 0,27) \times (405,6 - 220,1) \Rightarrow \boxed{q_f = 135 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

- (d) D'après le premier principe appliqué sur un cycle :

$$\boxed{w = -q_f - q_c}$$

Application numérique : $w = -135,4 + 157,8$ $\boxed{w = 22,4 \text{ kJ.kg}^{-1}}$

- (e) Efficacité de la PAC

i. Efficacité $e = \frac{-q_c}{w} = \frac{157,8}{22,4} \Rightarrow \boxed{e = 7,0}$

- ii. Efficacité de Carnot :

$$e_C = \frac{T_c}{T_c - T_f} = \frac{323}{323 - 288} \Rightarrow \boxed{e_C = 9,2}$$

On constate que $e < e_C$, le cycle n'est pas réversible.

Lors de l'évolution (2) \rightarrow (3), la vapeur à la température T_2 est refroidie au contact d'un thermostat à la température $T_c \neq T_2$. Cet échange thermique entre deux corps de température différente est irréversible.

La détente de Joule-Kelvin est mécaniquement irréversible.

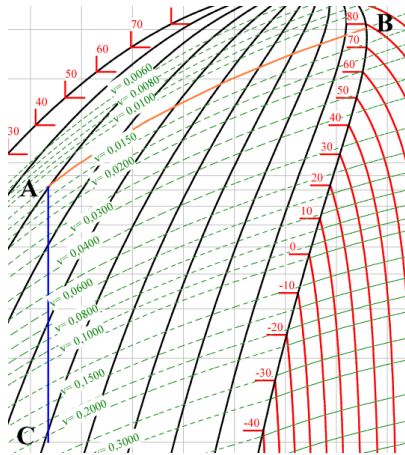
Stockage d'un fluide diphasé : le GPL

- Vaporiser un liquide représente un coût énergétique, l'enthalpie massique de la vapeur est nécessairement supérieure à l'enthalpie massique du liquide. Le liquide correspond à la partie gauche du diagramme (enthalpie massique faible), la partie de droite correspond à la vapeur pure. Le domaine central est associée au mélange liquide-vapeur
- Pour un gaz parfait (gaz réel à faible pression de l'ordre de la pression atmosphérique), l'enthalpie massique est une simple fonction de la température. Les isothermes se confondent avec des isenthalpiques et sont donc des droites verticales. Dans le domaine diphasé, la température impose la pression. Les isothermes sont également des isobares, c'est à dire des portions horizontales. Dans l'approximation des liquides incompressibles, l'enthalpie massique est une simple fonction de la température. Une isotherme est donc également une isenthalpique, c'est à dire une droite verticale. Les résultats obtenus dans les modèles de la phase condensée incompressible et indilatable et du gaz parfait ne s'appliquent plus au niveau du point critique.
- En croisant la courbe donnant la fraction molaire $x = 0,20$ et la courbe donnant la température 20°C , on obtient une pression de l'ordre de $P = 8,5 \text{ bar}$. Le volume massique est de l'ordre de $\boxed{v = 0,0125 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}}$, c'est à dire pour un volume $V = 50 \text{ L}$, une masse de l'ordre de $\boxed{m \simeq 4,0 \text{ kg}}$. Si on remplit la totalité du réservoir avec un liquide saturant, la capacité maximale est $\boxed{m_{max} = 25 \text{ kg}}$.
- Considérons la situation avec le GPL stocké à 20°C et un titre en vapeur $x = 0,20$. La masse étant fixée (pas d'utilisation) et le volume étant imposé (50 L), le volume massique est préservé lors de l'évolution. On se déplace sur la courbe d'isovolume massique $v = 0,0125 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$ (évolution AB sur le diagramme ci-après), jusqu'à croiser la pression limite égale à 30 bars. Ce qui correspond à une température de 80°C .

5. La soupape permet d'éviter l'explosion du réservoir qui doit impérativement rester à une pression inférieure à 30 bar.

Diminuer la quantité de matière à volume fixé permet de faire retomber la pression.

6. La détente s'accompagnant d'une chute de pression de manière isenthalpique, la température diminue et le propane se vaporise partiellement. Sur le tracé AC du diagramme (P, h), pour une pression de sortie égale à 1 bar, on lit $T \simeq -40^\circ\text{C}$, $x \simeq 0,5$.



Évaporation de l'eau

1. La définition du degré d'hygrométrie donne : $P_{H_2O} = H \times P_{sat}$

Pour la vapeur eau assimilée à un gaz parfait : $P_{H_2O} = \frac{n_{H_2O}RT}{V}$, on en déduit :

$$H \times P_{sat} = \frac{n_{H_2O}RT_0}{V} \Rightarrow n_{H_2O} = \frac{HP_{sat}V}{RT} = \frac{0,60 \times 2,3 \times 10^3 \times 40}{8,31 \times 293}$$

$$\boxed{n_{H_2O} \simeq 23 \text{ mol.}}$$

2. 200 mL d'eau correspondent à 11,1 mol d'eau ; si toute l'eau s'évapore on obtient environ 34 mol d'eau dans l'air ce qui correspond à une pression partielle :

$$P_{H_2O} = \frac{n_{H_2O}RT_0}{V} = \frac{34 \times 8,31 \times 293}{40} \Rightarrow \boxed{P_{H_2O} = 2,1 \text{ kPa}}$$

$P_{H_2O} < P_{sat}$, tout le liquide s'évapore. Le degré d'hygrométrie vaut alors :

$$H = \frac{P_{H_2O}}{P_{sat}} = \frac{2,1}{2,3} \Rightarrow \boxed{H = 91\%}$$

Lycée Naval, Spé 2.

Chimie (Mines PSI 2015, correction)

1. Les règles générales de remplissage :

- **Règle de Klechkowski** : on remplit les couches selon $n + l$ croissant et pour $n + l = cste$ à n croissant ;
- **Règle de Pauli** : deux électrons ne peuvent avoir leurs quatre nombres quantiques identiques, en conséquence on peut placer au maximum deux électrons dans une cas quantique avec des spins anti-parallèles ;
- **Règle de Hund** : dans une sous-couche incomplète, on place un maximum d'électrons célibataires de spin parallèle.

Dans le cas présent, $\text{Li} : 1s^2 2s^1$. Le lithium appartient à la première colonne, colonne des **alcalins**.

2. Le potentiel d'interaction électrostatique entre un électron et le noyau dépend de la distance ; pour les autres éléments de la colonne des alcalins, l'électron célibataire de la couche extérieure est plus éloigné du noyau. L'énergie d'ionisation consistant à arracher un électron à l'élément est donc plus élevée pour le lithium que pour les autres éléments de la colonne.

3. Le lithium est un réducteur qui joue le rôle de l'anode dans une pile. La f.e.m de la pile vaut $e = E_{cathode} - E_{anode}$. À potentiel cathodique fixé, un « potentiel d'électrode bas » pour l'anode permet d'avoir une **f.e.m plus grande pour la pile**. Ceci est mis à profit dans les piles au lithium, par exemple les piles « bouton ».

4. La masse molaire d'un élément est la moyenne pondérée des masses molaires des différents isotopes compte tenu des proportions présentes dans la nature. En conséquence et en notant x la proportion molaire de lithium ${}^6\text{Li}$:

$$M_{Li} = xM_{{}^6\text{Li}} + (1-x)M_{{}^7\text{Li}} \Rightarrow x = \frac{M_{{}^7\text{Li}} - M_{Li}}{M_{{}^7\text{Li}} - M_{{}^6\text{Li}}}$$

Application numérique :

$$x = \frac{7,0 - 6,95}{7,0 - 6,0} = \frac{0,05}{1} \Rightarrow \boxed{x = 5\%}$$

Il y a 5% de lithium ${}^6\text{Li}$ et 95% de lithium ${}^7\text{Li}$.

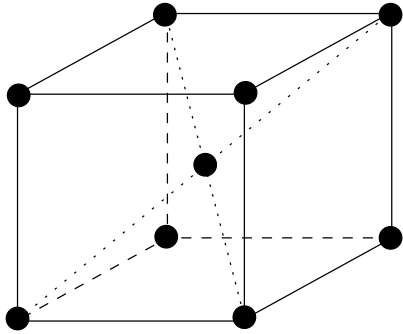
5. Représentation de la maille :

- **Contenu propre** : 2 atomes par maille ($2 = 8 \times (1/8) + 1$)
- **Coordinnence** : 8 plus proches voisins (Cf. atome central, figure ci-après).

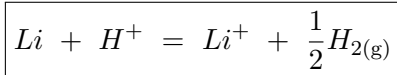
6. La tangence se fait selon la grande diagonale du cube : $\boxed{4R = a\sqrt{3}}$.

Application numérique :

$$a = \frac{4R}{\sqrt{3}} \simeq \frac{4R}{7} \times 4 = \frac{16R}{7} = \frac{16 \times 155}{7} \quad a \simeq \boxed{3,5 \times 10^2 \text{ pm}}$$



7. Le lithium est oxydé en ion lithium, l'eau est réduite en dihydrogène, ce qui donne pour l'équation bilan en milieu acide :



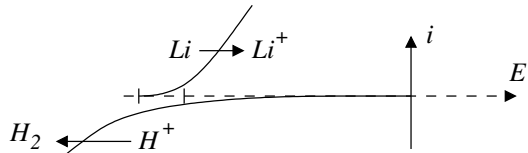
8. $\Delta_r G^\circ = -RT \ln K = \mathcal{F}E^\circ(\text{Li}^+/\text{Li}) - \mathcal{F}E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2)$, on en déduit pour une température $T = 298 \text{ K}$:

$$K = 10^{(E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) - E^\circ(\text{Li}^+/\text{Li}))/0,06} = 10^{3/0,06} \Rightarrow \boxed{K = 10^{50} \gg 1}$$

Compte tenu de la valeur de la constante d'équilibre, la réaction est totale d'un point de vue thermodynamique.

9. La faible réactivité du lithium avec l'eau doit s'expliquer par un **critère cinétique**.

10. La faible réactivité s'explique certainement par une forte surtension du dégagement gazeux de dihydrogène sur le métal lithium :



On peut aussi envisager la formation d'un oxyde métallique entraînant une passivation du métal.

11. L'acide sulfurique est considéré comme un diacide : $\text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow 2\text{H}^+ + \text{SO}_4^{2-}$. Pour dissoudre $n_c = 1$ mole de spodumène, il faut donc 8 moles de H^+ et donc 4 moles d'acide sulfurique :

$$n_{\text{H}_2\text{SO}_4} = 4n_c$$

Dans le cas d'acide sulfurique pur, le nombre de moles est relié au volume selon :

$$n_{\text{H}_2\text{SO}_4} = \frac{m_{\text{H}_2\text{SO}_4}}{M_{\text{H}_2\text{SO}_4}} = \frac{\rho_{\text{H}_2\text{SO}_4} \times V}{M_{\text{H}_2\text{SO}_4}}$$

La solution ne comportant que 93% d'acide sulfurique, un même volume libère moins de moles d'acide sulfurique :

$$4n_c = n_{\text{H}_2\text{SO}_4} = \frac{0,93 \times \rho_{\text{H}_2\text{SO}_4} V}{M_{\text{H}_2\text{SO}_4}}$$

On en déduit :

$$V = \frac{4n_c M_{\text{H}_2\text{SO}_4}}{0,93 \times \rho_{\text{H}_2\text{SO}_4}}$$

Application numérique :

$$V = \frac{4 \times 1 \times 98 \times 10^{-3}}{0,93 \times 2} \Rightarrow \boxed{V = 0,2 \text{ L}}$$

12. À l'apparition du précipité, l'équilibre est défini et l'aluminium est encore quasi-totalement en solution.

$$[\text{Al}^{3+}][\text{HO}^-]^3 = K_s = 10^{-33} \Rightarrow [\text{HO}^-]^3 = 10^{-30}$$

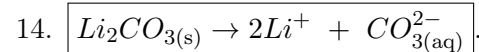
On en déduit : $[\text{HO}^-] = 1,0 \times 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1}$, donc $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1,0 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$, c'est à dire $\boxed{\text{pH} = 4}$.

Lorsqu'il reste 0,1% d'ions en solution, $[\text{Al}^{3+}] = 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$:

$$[\text{Al}^{3+}][\text{HO}^-]^3 = K_s = 10^{-33} \Rightarrow [\text{HO}^-]^3 = 10^{-27}$$

On en déduit : $[\text{HO}^-] = 1,0 \times 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$, donc $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1,0 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$, c'est à dire $\boxed{\text{pH} = 5}$.

13. Le carbonate de sodium se dissout en solution pour permettre la précipitation du carbonate de calcium qui est donc **moins soluble** que le carbonate de sodium.



15. On constate que la solubilité diminue avec la température, la réaction est défavorisée par une hausse de la température, la réaction est **exothermique**.

16. $\Delta_r H^\circ < 0$, cette grandeur s'appelle l'**enthalpie standard de réaction**.

17. On intègre la relation de Van't Hoff entre les deux températures considérées :

$$\frac{d \ln K}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2} \Rightarrow \int_{K_1}^{K_2} d \ln K = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2} dT$$

$$\text{On en déduit : } \ln \left(\frac{K_2}{K_1} \right) = \frac{\Delta_r H^\circ (T_2 - T_1)}{RT_1 T_2}$$

Pour la réaction considérée, en appelant s la solubilité :

$$K = [Li^+]^2 [CO_3^{2-}] = (2s)^2 s = 4s^3$$

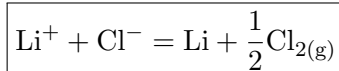
Ce qui donne pour l'enthalpie standard de réaction :

$$\Delta_r H^\circ = \frac{RT_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \left(\frac{s_2^3}{s_1^3} \right)$$

Application numérique :

$$\Delta_r H^\circ = \frac{-8,3 \times 293 \times 373}{80} \ln 2^3 \Rightarrow \boxed{\Delta_r H^\circ \simeq -24 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

18. On observe, à la cathode, la réduction du lithium $Li^+ + e^- = Li$ et, à l'anode, l'oxydation des ions chlorure $Cl^- = \frac{1}{2} Cl_2 + e^-$, ce qui donne pour l'équation bilan :



19. L'électrode **a** négative apporte des électrons pour la réduction des ions lithium (1) et lithium (2).

Cette électrode est la cathode.

L'électrode **a** positive reçoit des électrons apportés par l'oxydation des ions chlorure (3) et en dichlore (4).

Cette électrode est l'anode.

20. La tension minimale est la « tension thermodynamique » associée à la différence des potentiels de Nernst entre le couple du chlore et celui du lithium. Les activités n'étant pas fournies, on assimile les potentiels de Nernst aux potentiels standard : $\boxed{E_{min} = 4,4 \text{ V}}$.

Le document indique une tension à imposer entre 6 et 7 V. Il est nécessaire de tenir compte en plus du critère thermodynamique des **aspects cinétiques**, surtension à imposer à la cathode et à l'anode pour assurer un courant non nul et d'une **chute ohmique** due à la résistance de l'électrolyseur.

21. 275 kg de lithium correspondent à environ 40×10^3 mol, 1400 kg de dichlore correspondent à environ 20×10^3 mol. On retrouve le facteur 2 associé aux coefficients stœchiométriques de l'équation de réaction.

22. Il faut relier la masse lithium formée à la charge ayant circulé :

$$m_{Li} = n_{Li} \times M_{Li} = n_e \times M_{Li} = \frac{I \times T}{\mathcal{F}} \times M_{Li} = \frac{j \times S \times T}{\mathcal{F}} \times M_{Li}$$

Ce qui donne pour l'aire de la surface :

$$S = \frac{m_{Li} \times \mathcal{F}}{j \times T \times M_{Li}} = \frac{275 \times 96500}{6,5 \times 10^3 \times 24 \times 3600 \times 7 \times 10^{-3}} \quad \boxed{S \simeq 7 \text{ m}^2}$$

23. L'énergie est le produit de la tension par l'intensité du courant et la durée. On laisse la durée en heures pour obtenir des Wh, on divise par la masse de lithium formée pour obtenir une énergie massique.

$$\mathcal{E}_m = \frac{U \times (j \times S) \times T}{M_{Li}} = \frac{7 \times (7 \times 10^3 \times 7) \times 24}{275} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_m \simeq 30 \text{ kWh.kg}^{-1}}$$

La valeur obtenue est légèrement sous-estimée. Dans le document, il est indiqué que l'énergie consommée inclut la partie électrolyse et la partie chauffage que nous n'avons pas prise en compte.