

Transmission optique (Banque PT 2013, correction)

I. Propagation guidée de la lumière

A. Lois de Descartes

1. Les rayons peuvent être considérés comme indépendants en l'absence d'interférences lumineuses.

2. Lois de Descartes pour la réflexion :

- Première loi : le rayon réfléchi est situé dans le plan d'incidence, plan contenant la normale au dioptre au point d'incidence et le rayon incident ;
- Seconde loi : $i_1 = i'$ (pour les angles non orientés du schéma de l'énoncé).

Lois de Descartes pour la transmission :

- Première loi : le rayon transmis est situé dans le plan d'incidence, plan contenant la normale au dioptre au point d'incidence et le rayon incident ;
- Seconde loi : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (pour les angles non orientés du schéma de l'énoncé).

3. En cas de réflexion totale, la totalité de l'énergie lumineuse est réfléchi.

Cette situation peut se rencontrer dans le cas du passage d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent, à condition que l'angle d'incidence soit supérieur à la valeur limite associée à $i_2 = \pi/2$:

$$i_1 \geq i_{1,lim} = \arcsin(n_2/n_1)$$

B. Fibre optique à saut d'indice

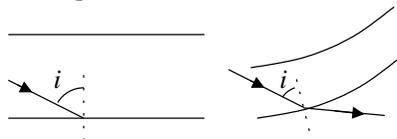
1. L'angle limite de réflexion totale vérifie d'après la formule précédente (avec $i + \theta = \pi/2$) :

$$n_1 \sin i_{lim} = n_2 \Rightarrow n_1 \cos \theta_c = n_2$$

Les rayons susceptibles de se propager sont les rayons faisant un angle $\theta < \theta_c$, c'est à dire les rayons longeant l'axe, *a contrario* des rayons très inclinés pourront toujours être transmis (Cf. cas limite de l'incidence normale).

$$\theta < \theta_c = \arccos(n_2/n_1)$$

2. Courber la gaine diminue localement l'angle i ce qui favorise la possibilité de transmission dans la gaine.



3. Ouverture numérique

$$(a) \quad n_2^2 = n_1^2 \cos^2 \theta_c = n_1^2 (1 - \sin^2 \theta_c) = n_1^2 - ON^2 \Rightarrow ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$(b) \quad n_1^2 - n_2^2 = (n_1 + n_2)(n_1 - n_2) \simeq 2n_2 \delta n \Rightarrow ON = \sqrt{2n_2 \delta n}$$

$$(c) \quad \text{Application numérique : } ON = 0,3$$

(d) Appliquons la loi de Descartes pour la transmission à l'entrée de la fibre : $\sin(\theta_0) = n_1 \sin(\theta)$

$$\text{Avec } ON = n_1 \sin \theta_c, \text{ il faut } \sin \theta_0 \leq ON$$

C. Modes de propagation

1. Dans le vide $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, ce qui donne pour les équations de Maxwell :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad ; \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2. En considérant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday et en reportant l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient (Cf. cours) :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

3. Dans un milieu d'indice n , la vitesse de propagation vaut $v = c/n$.

4. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$-j\omega \vec{B} = -\frac{\partial E(x)e^{j(\omega t - kz)}}{\partial z} \vec{u}_x + \frac{\partial E(x)e^{j(\omega t - kz)}}{\partial x} \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = \left(-\frac{k}{\omega} E(x) \vec{u}_x + \frac{j}{\omega} \frac{dE(x)}{dx} \vec{u}_z \right) e^{j(\omega t - kz)} \Rightarrow \vec{B}_m = -\frac{k}{\omega} E(x) \vec{u}_x + \frac{j}{\omega} \frac{dE(x)}{dx} \vec{u}_z$$

5. Comme le montre la suite de l'énoncé, on étudie la propagation du champ dans le cœur et la gaine, il s'agit donc de modèles volumiques. Il n'y a donc pas à considérer de charges ou courants surfaciques à l'interface. La continuité du champ magnétique implique la continuité du champ électrique et de sa dérivée spatiale par rapport à x .

6. Propagation dans la gaine :

(a) En remplaçant $c \rightarrow c/n_2$, on obtient l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{n_2^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

(b) Compte tenu de la forme de l'onde proposée, on en déduit pour l'amplitude $E(x)$:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} - k^2 E(x) + \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 E(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 E(x)}{dx^2} + (n_2^2 k_0^2 - k^2) E(x) = 0$$

(c) Pour $n_2 k_0 > k$:

Les solutions sont des exponentielles complexes ou une combinaison de sinus et de cosinus, la propagation est autorisée.

Pour $n_2 k_0 < k$:

Les solutions sont des exponentielles réelles, on observe en pratique une décroissance exponentielle de l'amplitude. Il n'y a alors pas de propagation dans la gaine. **Cette condition correspond à une propagation dans le cœur** (Cf. réflexion totale).

(d) Pour $n_2 k_0 - k < 0$, les solutions sont de la forme :

$$\forall x > a \quad E(x) = K_1 e^{-x/\delta} + K_2 e^{x/\delta} \quad \forall x < -a \quad E(x) = K_3 e^{-x/\delta} + K_4 e^{x/\delta}$$

7. Propagation dans le cœur :

(a) En remplaçant $c \rightarrow c/n_1$, on obtient l'équation de propagation :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{n_1^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

(b) Ce qui donne pour l'équation différentielle vérifiée par l'amplitude du champ électrique :

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + (n_1^2 k_0^2 - k^2) E(x) = 0$$

(c) Pour une propagation dans le cœur, il faut $n_1 k_0 > k$.

(d) Avec $\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \eta^2 E(x) = 0$, les solutions sont de la forme :

$$E(x) = A \cos(\eta x) + B \sin(\eta x)$$

8. On considère une solution paire :

$$\rightarrow \forall |x| < a \quad E(x) = E_m \cos(\eta x)$$

$$\rightarrow \forall x > a \quad E(x) = K_1 e^{-x/\delta} \quad (K_2 = 0 \text{ éviter une croissance exponentielle})$$

$$\rightarrow \forall x < -a \quad E(x) = K_1 e^{x/\delta} \quad (K_3 = 0 \text{ éviter une croissance exponentielle})$$

9. L'énoncé demande de tracer la solution pour $2a = 3 \times 2\pi/\eta$, la fonction doit avoir une allure sinusoidale dans le cœur et exponentiellement décroissante dans la gaine.

Notons cependant que la valeur proposée pour ηa n'est pas réaliste car elle correspondrait à une profondeur de pénétration δ infinie dans la gaine (Cf. question suivante).

10. Continuité de l'amplitude en a : $E_m \cos(\eta a) = K_1 e^{-a/\delta}$.

$$\text{Continuité de la dérivée en } a : -\eta \times E_m \sin(\eta a) = -\frac{1}{\delta} K_1 e^{-a/\delta}$$

On en déduit :

$$\eta \tan(\eta a) = \frac{1}{\delta}$$

Expression que l'on peut réécrire :

$$\tan(\eta a) = \sqrt{\frac{k^2 - n_2^2 k_0^2}{\eta^2}}$$

Compte tenu de l'expression proposée, il s'agit de vérifier :

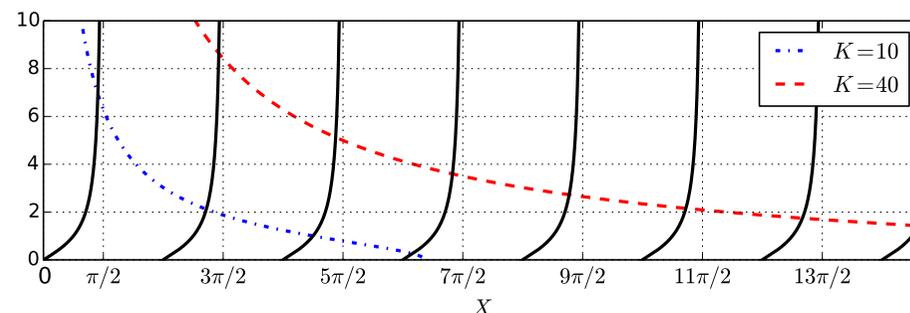
$$\frac{k^2 - n_2^2 k_0^2}{\eta^2} = \frac{k_0^2 ON^2}{\eta^2} - 1 \Leftrightarrow k^2 - n_2 k_0^2 = k_0^2 ON^2 - \eta^2$$

$$k^2 - n_2^2 k_0^2 = k_0^2 (n_1^2 - n_2^2) - \eta^2 \Leftrightarrow \eta^2 = n_1^2 k_0^2 - k^2$$

On retrouve bien l'expression de η .

11. En posant $X = \eta a$, on obtient l'équation : $\tan X = \sqrt{\frac{k_0^2 ON^2 a^2}{X^2} - 1}$.

Il s'agit de tracer $f : X \rightarrow \tan X$ et $g : X \rightarrow \sqrt{\frac{K^2}{X^2} - 1}$, en posant $K = k_0 \times ON \times a$; l'intersection des deux courbes donne les solutions de l'équation.



12. Il y a un mode solution dans chaque intervalle de la forme $]p\pi, (p+1)\pi[$ et ceci tant que $X < K$ sinon la fonction racine n'est plus définie.

Ceci donne un total N compris entre $E(K/\pi)$ et $1 + E(K/\pi)$ avec E la partie entière. On peut vérifier que, pour $K = 10$, il y a bien 4 intersections.

Avec $K = \frac{2\pi}{\lambda_0} ON \times a$, le résultat obtenu prend la forme :

$$E\left(\frac{2 \times ON \times a}{\lambda_0}\right) \leq N \leq 1 + E\left(\frac{2 \times ON \times a}{\lambda_0}\right)$$

13. Application numérique :

$$E\left(\frac{2 \times 0,3 \times 25}{1}\right) = 15 \Rightarrow 15 \leq N \leq 16$$

Pour le cas considéré $K = 15\pi$, il y a donc exactement **15 modes propres**.

14. Tant que $K < \pi$, il y a au plus une unique solution, c'est à dire, à la limite :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} ON \times a_{lim} = \pi \Leftrightarrow a_{lim} = \frac{\lambda_0}{2ON}$$

Application numérique : $a_{lim} = \frac{1}{0,6} \Rightarrow a_{lim} = 1,7 \mu\text{m}$

II. Absorption et dispersion

A. Absorption

1. Spectre :

- λ_0 est situé dans le domaine infrarouge.
- L'absorption infrarouge est associée à des transitions électroniques au sein des molécules.

2. En intégrant l'expression proposée, on obtient :

$$\mathcal{P}_s = \mathcal{P}_e e^{-\alpha L}$$

3. C'est à dire pour les pertes relatives :

$$\frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}_e - \mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_e} \Rightarrow \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} = 1 - e^{-\alpha L}$$

4. Partons de la définition de l'atténuation :

$$A = 10 \log \left(\frac{\mathcal{P}_e}{\mathcal{P}_s} \right) = 10 \log (e^{\alpha L}) = \frac{10}{\ln 10} \ln (e^{\alpha L}) \Rightarrow A = \frac{10}{\ln 10} \alpha L$$

Application numérique :

$$\alpha = \frac{A \ln 10}{10L} = \frac{0,2 \times 2,3}{10 \times 1} \Rightarrow \alpha = 0,046 \text{ km}^{-1} = 4,6 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$$

5. αL ne vaut que 0,046 pour 1 km, on peut donc effectuer un développement limité à l'ordre 1, $\Delta \mathcal{P}/\mathcal{P} \simeq \alpha L$.

Application numérique :

$$\frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}}(10 \text{ m}) = 4,6 \times 10^{-4} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}}(1 \text{ km}) = 4,6 \times 10^{-2}$$

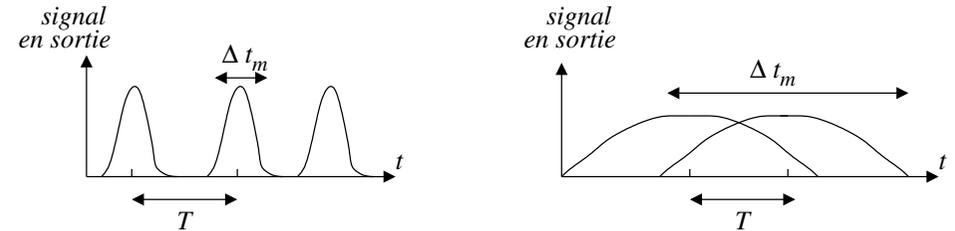
On constate que l'affaiblissement commence à être sensible à l'échelle du kilomètre.

B. Dispersion intermodale

1. Pour le rayon qui longe l'axe, la distance à parcourir est L ; le rayon qui fait un angle θ_c avec l'horizontale doit parcourir la distance $L/\cos \theta_c$. La propagation se fait à c/n_1 dans le cœur, ce qui donne pour la différence de temps de propagation :

$$\Delta t_m = \frac{n_1}{c} \left(\frac{L}{\cos \theta_c} - L \right) = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \Rightarrow \Delta t_m = \frac{L n_1 (n_1 - n_2)}{c n_2}$$

2. Chaque impulsion constituée des différentes incidences s'étale au cours de la propagation :



Pour $\Delta t_m > T$, les impulsions se chevauchent en sortie, le signal n'est plus utilisable.

3. La bonne transmission des informations impose $\Delta t_m < T$, c'est à dire en terme de fréquence $\Delta t_m < 1/f$ et donc, à la limite, pour la bande passante :

$$\Delta t_m = \frac{1}{BP_m} \Leftrightarrow BP_m = \frac{cn_2}{n_1 L (n_1 - n_2)}$$

4. Application numérique :

$$BP_m(10 \text{ m}) = \frac{3 \times 10^8 \times 1,5}{1,53 \times 10 \times 0,03} \Rightarrow BP_m(10 \text{ m}) = 1 \text{ GHz}$$

$$BP_m(1 \text{ km}) = \frac{3 \times 10^8 \times 1,5}{1,53 \times 10 \times 0,03} \Rightarrow BP_m(1 \text{ km}) = 0,01 \text{ GHz}$$

La bande passante diminue logiquement avec la longueur de la fibre.

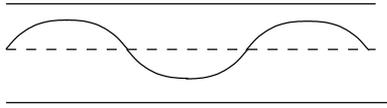
Pour éviter la dispersion intermodale, il faut limiter la propagation à un unique mode en limitant le rayon de la fibre.

5. L'indice doit diminuer lorsqu'on s'éloigne de l'axe pour reproduire le phénomène de réflexion totale.

L'indice doit être une fonction décroissante de la distance à l'axe.

On peut alors décomposer le milieu en des strates d'indice progressivement variable et appliquer la loi de Descartes en chacune de ces strates. Le rayon va s'incurver et on peut montrer que, pour un profil parabolique de l'indice, la rayon suit une trajectoire sinusoidale.

Le gain est alors double, le rayon extrême parcourt une moins grande distance et comme cette propagation s'effectue dans des milieux d'indice plus faible, la vitesse est plus grande, l'écart temporel diminue fortement.



C. Dispersion chromatique

1. Pour la lumière longeant l'axe, le temps de parcours s'exprime selon :

$$t_c = \frac{Ln_1}{c}$$

Avec $n_1 = n_1(\lambda)$, le temps de parcours est une fonction de la longueur d'onde, toutes les longueurs d'onde ne se propagent pas à la même vitesse.

2. Superposition d'ondes :

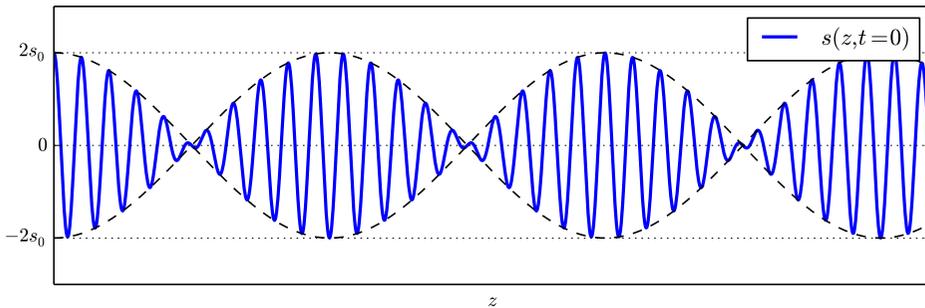
- (a) Par sommation des deux ondes :

$$s(z, t) = s_1(z, t) + s_2(z, t) = S_0 [\cos(\omega t - kz) + \cos((\omega + \delta\omega)t - (k + \delta k)z)]$$

$$s(z, t) \simeq 2S_0 \cos(\omega t - kz) \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}z\right)$$

- (b) Avec $\delta\omega \ll \omega$ et $\delta k \ll k$, le terme $\cos(\delta\omega t/2 - \delta k z/2)$ est le terme d'enveloppe à variations lentes, le terme $\cos(\omega t - kz)$ est la porteuse à variation rapide.

- (c) Représentation de $s(z, t = 0)$:



- (d) L'enveloppe se propage à la vitesse de groupe : $v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$. L'enveloppe se propage sur une longueur L en une durée :

$$\tau_g = \frac{L}{\delta\omega/\delta k} \Rightarrow \frac{\tau_g}{L} = \frac{\delta k}{\delta\omega}$$

3. $\Delta t_c = D(\lambda) \times \Delta\lambda \times L$.

En appliquant le même raisonnement que pour la dispersion intermodale,

la fréquence du signal doit vérifier $f < (1/\Delta t_c)$, c'est à dire pour la bande passante :

$$BP_c = \frac{1}{\Delta t_c} = \frac{1}{10 \times 10^{-12} \times 1 \times 1} \Rightarrow \boxed{BP_c = 1,0 \times 10^{11} \text{ Hz}}$$

On constate que la dispersion chromatique est nettement inférieure à la dispersion intermodale d'où l'intérêt de travail avec une fibre monomode.

III. Émission et réception

A. Émission

1. Hors programme PSI.
2. Sur la distance d , l'onde passant par la voie 1 se propage dans un milieu d'indice n_1 ce qui correspond à un déphasage $kd = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 d$. L'onde passant par la voie 2 se propage dans un milieu d'indice n ce qui correspond à un déphasage $kd = \frac{2\pi}{\lambda} nd$.

En sortie de l'interféromètre, le déphasage généré vaut :

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} (n - n_1) d$$

3. L'intensité I a pour expression :

$$I = \langle f_1^2 \rangle + \langle f_2^2 \rangle + 2\langle f_1 f_2 \rangle = \frac{g_0^2}{2} + \frac{g_0^2}{2} + g_0^2 \cos \Phi \Rightarrow \boxed{I = g_0^2 [1 + \cos \Phi]}$$

4. Transmission des données :

- (a) Φ doit passer de 0 à π , c'est à dire à la limite :

$$\frac{2\pi}{\lambda} (n - n_1) d = \pi \Leftrightarrow \boxed{\Delta n = \frac{\lambda}{2d}}$$

- (b) Application numérique :

$$\Delta n = \frac{1,5 \times 10^{-6}}{2 \times 5 \times 10^{-2}} \Rightarrow \boxed{\Delta n = 1,5 \times 10^{-5}}$$

B. Réception

1. Courant de photodétection

- (a) En divisant la puissance \mathcal{P}_s par l'énergie d'un photon, on obtient le nombre de photons par seconde. En multipliant par le rendement quantique, on en déduit le nombre d'électrons collectés par seconde ; en tenant compte de la charge élémentaire, on en déduit le courant :

$$i_0 = \frac{\mathcal{P}_s}{hc/\lambda} \times r \times e \Rightarrow \boxed{i_0 = \frac{\lambda \mathcal{P}_s r e}{hc}}$$

(b) Application numérique :

$$i_0 = \frac{10 \times 10^{-3} \times 1,5 \times 10^{-6} \times 0,8 \times (5/3) \times 10^{-19}}{(20/3) \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} \quad \boxed{i_0 = 10 \text{ mA}}$$

2. Pour un ALI idéal fonctionnant en régime linéaire, $V_+ = V_- = 0$, le courant circulant dans la source de courant traverse la résistance R_f :

$$\boxed{V_0 = R_f i_0}$$

3. On définit i_c le courant dans le condensateur défini en convention récepteur par rapport à V_- et i_f le courant dans la résistance R_f allant de la sortie vers la borne non inverseuse.

On applique la loi des nœuds à l'entrée inverseuse :

$$i_F = i_0 + i_c \Rightarrow \frac{V_0 - V_-}{R_f} = i_0 + C_d \frac{dV_-}{dt}$$

Avec $V_0 = G\varepsilon = G(V_+ - V_-) = -GV_-$, on en déduit :

$$V_0(1 + G) + R_f C_d \frac{dV_0}{dt} = R_f G i_0$$

C'est à dire pour un régime forcé à la pulsation Ω :

$$\frac{V_0}{i_0} = \frac{R_f G}{(1 + G) + j\Omega R_f C_d} = \frac{R_f}{1 + 1/G + j\Omega R_f C_d/G}$$

Avec $G \gg 1$, on peut négliger $1/G$ vis à vis de 1 pour la partie réelle du dénominateur :

$$\boxed{\frac{V_0}{i_0} = \frac{R_f}{1 + j\Omega \times (R_f C_d)/G}}$$

4. La fonction de transfert correspond à un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure :

$$\boxed{\Omega_c = \frac{G}{R_f C_d}}$$

5. La saturation de l'ALI à basse fréquence impose une valeur maximale pour la résistance :

$$R_{max,1} = \frac{V_{sat}}{i_0} = \frac{15}{0,01} \Rightarrow \boxed{R_{max,1} = 1,5 \text{ k}\Omega}$$

La pulsation de coupure doit au moins être égale à la fréquence à transmettre ce qui impose :

$$R_{max,2} = \frac{G}{C_d \times 2\pi \times f_{max}} = \frac{10^5}{10^{-11} \times 2\pi \times 10^8} \Rightarrow R_{max,2} \simeq 15 \text{ M}\Omega$$

On peut donc retenir la valeur $\boxed{R_f = 1,0 \text{ k}\Omega}$.