

Planètes extra-solaires (ENS BCPST 2015)

I - Détection d'une planète extrasolaire

I.A - Troisième loi de Kepler

1. Force de gravitation :
$$\vec{F}_{e/p} = \frac{-Gm_p M_e}{R^2} \vec{u}_r$$

2. Pour un mouvement à force centrale, le moment cinétique se conserve et implique $r^2 \dot{\theta} = cste$ (constante des aires). Un mouvement circulaire ($R = cste$) est donc nécessairement uniforme ($\dot{\theta} = \omega = cste$).

On applique la deuxième de Newton à la planète dans le référentiel de l'étoile supposé galiléen.

La force étant radiale, il en est de même de l'accélération.

$$m_p \vec{a}_p = \frac{-Gm_p M_e}{R^2} \vec{u}_r \Rightarrow -R\omega^2 = \frac{-GM_e}{R^2} \Rightarrow R\omega^2 = \frac{GM_e}{R^2}$$

3. Pour un mouvement à vitesse angulaire constante $\omega = 2\pi/T$, on retrouve alors la troisième loi de Kepler :

$$R \times \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM_e}{R^2} \Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_e}$$

4. Application numérique :

$$T_{Terre} = \left(\frac{4\pi^2 R^3}{GM_e}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi^2 \times (1,5 \times 10^{11})^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 2,0 \times 10^{30}}\right)^{1/2}$$

$$T_{Terre} = 3,16 \times 10^7 \text{ s} = 1 \text{ an}$$

À l'aide de la troisième loi de Kepler, on peut alors aisément déterminer les autres périodes de révolution :

$$T_J = T_{Terre} \times \left(\frac{R_J}{R_{Terre}}\right)^{3/2} = \left(\frac{7,8}{1,5}\right)^{3/2} \Rightarrow T_J \simeq 11,9 \text{ ans}$$

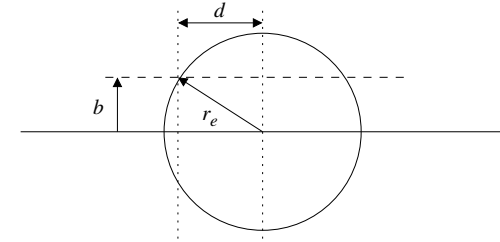
$$T_M = T_{Terre} \times \left(\frac{R_M}{R_{Terre}}\right)^{3/2} = \left(\frac{2,3}{1,5}\right)^{3/2} \Rightarrow T_M \simeq 1,9 \text{ ans}$$

I.B - Détection par la méthode des transits

5. Durée du transit

- (a) À vitesse fixée, la durée de transit dépend de la distance de parcours de la planète devant l'étoile.

Cette distance dépend du paramètre b comme le montre le schéma suivant :

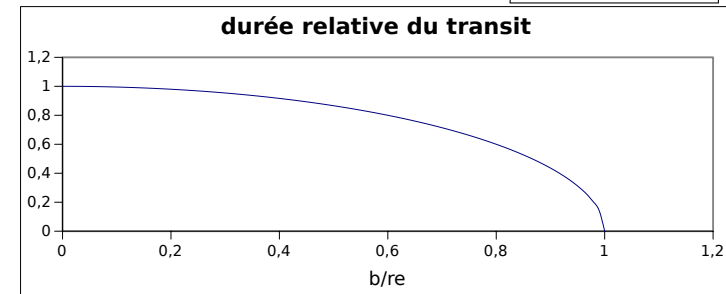


La distance d vaut $d(b) = \sqrt{r_e^2 - b^2} = r_e \sqrt{1 - (b/r_e)^2}$, ce qui donne pour le rapport des durées de transit :

$$\frac{\tau(b)}{\tau_e} = \frac{2d(b)}{2d(b=0)} \Rightarrow \tau(b) = \tau_e \sqrt{1 - \left(\frac{b}{r_e}\right)^2}$$

- (b) On applique la formule précédente pour $b = r_e/2$:

$$\frac{\tau(r_e/2)}{\tau_e} = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3/4} \Rightarrow \frac{\tau(r_e/2)}{\tau_e} \simeq 87\%$$



6. La durée du transit est le rapport de la distance parcourue devant l'étoile divisée par la vitesse de la planète autour de l'étoile :

$$\tau_e = \frac{2r_e}{v_p}$$

La vitesse de la planète se déduit de la troisième loi de Kepler :

$$v^2 = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{4\pi R^2}{T^2} = \frac{GM_e}{R}$$

On en déduit la formule demandée :

$$\tau_e = \frac{2r_e}{\sqrt{GM_e/R}} \Rightarrow \tau_e = 2r_e \sqrt{\frac{R}{GM_e}}$$

7. La phase transitoire correspond à l'entrée de la planète au sein du disque de l'étoile, c'est à dire une distance $2r_p$ à la vitesse de la planète :

$$\tau_p = \frac{2r_p}{v_p} \Rightarrow \boxed{\tau_p = 2r_p \sqrt{R/GM_e}}$$

8. $\tau_p \ll \tau_e$ à condition que $r_p \ll r_e$. Cette condition semble raisonnable pour une planète et une étoile.

9. Le flux émis est proportionnel à l'aire du disque de l'étoile $\mathcal{A} = \pi r_e^2$. La variation de flux est associée à l'aire du disque de la planète qui écrante l'étoile $\Delta\mathcal{A} = \pi r_p^2$, et donc pour la variation relative du flux lumineux :

$$\Delta\Phi/\Phi = \Delta\mathcal{A}/\mathcal{A} \Rightarrow \boxed{\Delta\Phi/\Phi = r_p^2/r_e^2}$$

10. Caractéristique du transit de la Terre :

$$\tau_e = 2 \times 7,0 \times 10^8 \times \sqrt{\frac{1,5 \times 10^{11}}{6,67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}} \Rightarrow \boxed{\tau_e \simeq 13 \text{ h}}$$

$$\tau_p = 2 \times 6,4 \times 10^6 \times \sqrt{\frac{1,5 \times 10^{11}}{6,67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}} \Rightarrow \boxed{\tau_p \simeq 7 \text{ min}}$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \left(\frac{6,4 \times 10^6}{7,0 \times 10^8}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = 8,4 \times 10^{-5}}$$

Caractéristique du transit de Jupiter :

$$\tau_e = 2 \times 7,0 \times 10^8 \times \sqrt{\frac{7,8 \times 10^{11}}{6,67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}} \Rightarrow \boxed{\tau_e \simeq 30 \text{ h}}$$

$$\tau_p = 2 \times 6,9 \times 10^7 \times \sqrt{\frac{7,8 \times 10^{11}}{6,67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}} \Rightarrow \boxed{\tau_p \simeq 3 \text{ h}}$$

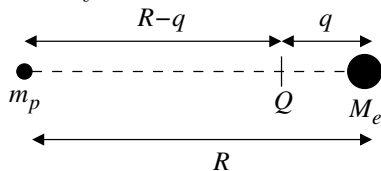
$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \left(\frac{6,9 \times 10^7}{7,0 \times 10^8}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = 9,7 \times 10^{-3}}$$

11. On peut envisager une fluctuation de l'émission solaire du fait d'une tempête solaire.

12. Le passage de la planète devant l'étoile est périodique. La variation de flux peut donc être distinguée d'une fluctuation inattendue par son **caractère périodique**.

I.C - Détection par décalage Doppler

13. D'après la formule du barycentre :



$$qM_e = (R-q)m_p \Rightarrow \boxed{q = \frac{Rm_p}{M_e + m_p}}$$

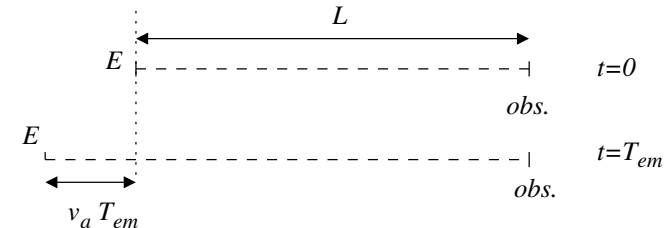
14. L'étoile parcourt une orbite de rayon q en une durée T donnée par la troisième loi de Kepler :

$$v = \frac{2\pi q}{T} = \frac{2\pi Rm_p}{(m_p + M_e) 2\pi R^{3/2}} \sqrt{GM_e} \Rightarrow \boxed{v = \frac{m_p}{m_p + M_e} \sqrt{\frac{GM_e}{R}}}$$

15. Décalage Doppler

(a) En $t = 0$, le premier signal est émis, il atteint l'observateur à l'instant $t_1 = L/c$.

En $t = T_{em}$, le second signal est émis à une distance $L + v_a T_{em}$, il atteint l'observateur à l'instant t_2 , le second signal s'est propagé pendant une durée $t_2 - T_{em}$ à la célérité c :



$$t_2 - T_{em} = \frac{L + v_a T_{em}}{c} \Rightarrow t_2 = T_{em} \left(1 + \frac{v_a}{c}\right) + \frac{L}{c}$$

On en déduit la période du signal perçue par l'observateur :

$$T_{rec} = t_2 - t_1 \Rightarrow T_{rec} = T_{em} \left(1 + \frac{v_a}{c}\right)$$

Pour une onde, la longueur d'onde et la période sont reliées par $\lambda = c \times T$, la formule obtenue pour les périodes et donc identiques à la formule sur les longueurs d'onde, c'est à dire avec les notations de l'énoncé :

$$\boxed{\lambda_a = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_a}{c}\right)}$$

(b) On en déduit : $\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_a}{c}}$.

(c) Pour une vitesse v_a positive, **étoile qui s'éloigne de la planète**, la longueur d'onde augmente ce qui correspond à un **décalage vers le rouge**.

16. Application :

(a) Caractéristiques pour le système Terre-Soleil :

$$q = \frac{Rm_p}{m_p + M_e} = \frac{1,5 \times 10^{11} \times 6,0 \times 10^{24}}{(6,0 \times 10^{24} + 2 \times 10^{30})} \quad \boxed{q = 450 \text{ km}}$$

$$v = \frac{6,0 \times 10^{24}}{(6,0 \times 10^{24} + 2 \times 10^{30})} \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 2,0 \times 10^{30}}{1,5 \times 10^{11}}} \Rightarrow \boxed{v = 8,9 \text{ cm/s}}$$

En considérant une longueur d'onde moyenne de 500 nm :

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{v_a}{c} = 500 \times \frac{8,9 \times 10^{-2}}{3 \times 10^8} \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = 1,5 \times 10^{-7} \text{ nm}}$$

Caractéristiques pour le système Jupiter-Soleil :

Il manque dans l'énoncé la masse de Jupiter $M_J = 1,9 \times 10^{27} \text{ kg}$.

$$q = \frac{Rm_p}{m_p + M_e} = \frac{7,8 \times 10^{11} \times 1,9 \times 10^{27}}{(1,9 \times 10^{27} + 2 \times 10^{30})} \quad \boxed{q = 740 \times 10^3 \text{ km}}$$

$$v = \frac{1,9 \times 10^{27}}{(1,9 \times 10^{27} + 2 \times 10^{30})} \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 2,0 \times 10^{30}}{7,8 \times 10^{11}}} \Rightarrow \boxed{v = 12,4 \text{ m/s}}$$

En considérant une longueur d'onde moyenne de 500 nm :

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{v_a}{c} = 500 \times \frac{8,9 \times 10^{-2}}{3 \times 10^8} \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = 2,1 \times 10^{-5} \text{ nm}}$$

(b) Les effets sont plus prononcés pour Jupiter du fait de sa masse très supérieure à celle de la Terre, cependant les effets restent très faibles, correction relative de l'ordre de 10^{-8} pour Jupiter. De tels résultats ne peuvent pas être atteints en TP.

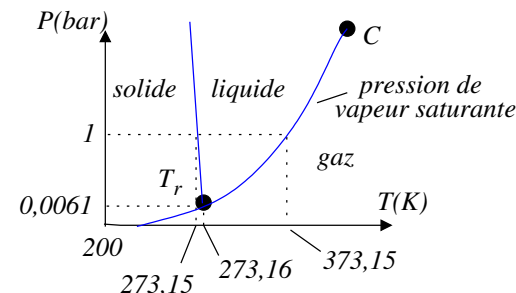
(c) Les vitesses de l'étoile sont très faibles devant la vitesse de la lumière, **l'approximation non relativiste est tout à fait applicable.**

II - Recherche de vie sur des planètes extrasolaires

II.A - Limites de la zone d'habitable

17. Température minimale

(a) Diagramme de phase de l'eau :



(b) Le point triple correspond à l'équilibre simultané des trois phases de l'eau.

(c) Pour l'eau, la pente de la courbe de fusion est négative, exception qui s'explique par une densité plus faible pour le solide par rapport au liquide pour une température voisine de 0°C . Un glaçon flotte dans un verre d'eau.

La courbe de fusion, en plus de passer par le point triple, passe par le point $(T = 273,15 \text{ K}, P = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa})$, température de fusion à pression ambiante.

Alors que la pression est multipliée par un facteur 150, la température varie seulement de 0,01 K soit une variation relative de l'ordre de 10^{-5} .

La pente est donc quasiment verticale, on peut retenir $\boxed{T = 273 \text{ K}}$ pour la température de changement d'état.

(d) Pour obtenir de l'eau liquide, il faut $\boxed{T_{min} = 273 \text{ K}}$.

18. Température de la planète

(a) L'étoile émet un flux $\Phi_e = 4\pi r_e^2 \sigma T_e^4$; au niveau de la planète, ce flux se répartit sur une sphère centrée sur l'étoile de rayon R , distance de l'étoile à la planète, d'aire $4\pi R^2$. La planète n'intercepte que la partie du flux qui traverse le disque terrestre d'aire πr_p^2 :

$$\Phi_{e/p} = 4\pi r_e^2 \sigma T_e^4 \times \frac{\pi r_p^2}{4\pi R^2} \Rightarrow \boxed{\Phi_{e/p} = r_e^2 \sigma T_e^4 \times \frac{\pi r_p^2}{R^2}}$$

(b) La planète émet un flux total :

$$\boxed{\Phi_{tot.p} = 4\pi r_p^2 \sigma T_p^4}$$

(c) En l'absence d'apports internes et en supposant la planète à l'équilibre thermique, les flux doivent s'égaliser, les apports devant compenser les pertes :

$$4\pi r_p^2 \sigma T_p^4 = r_e^2 \sigma T_e^4 \times \frac{\pi r_p^2}{R^2} \Rightarrow T_p^4 = \left(\frac{r_e}{R}\right)^2 T_e^4 \times \frac{1}{4} \Rightarrow T_p = \frac{T_e}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{r_e}{R}\right)^{1/2}$$

19. De la formule précédente, on déduit le rayon de l'orbite en fonction de la température :

$$R = \frac{r_e}{2} \times \left(\frac{T_e}{T_p}\right)^2$$

C'est à dire pour les valeurs extrêmes :

$$R_{min} = \frac{r_e}{2} \times \left(\frac{T_e}{T_{max}}\right)^2 \quad \text{et} \quad R_{max} = \frac{r_e}{2} \times \left(\frac{T_e}{T_{min}}\right)^2$$

20. Application numérique :

$$R_{min} = \frac{7,0 \times 10^8}{2} \times \left(\frac{5700}{363}\right)^2 = 8,63 \times 10^{10} \text{ m} \Rightarrow R_{min} = 0,58 \text{ ua}$$

$$R_{max} = \frac{7,0 \times 10^8}{2} \times \left(\frac{5700}{273}\right)^2 = 1,53 \times 10^{11} \text{ m} \Rightarrow R_{max} = 1,0 \text{ ua}$$

La présence d'une atmosphère créant un effet de serre naturel augmente en fait la température de la Terre obtenue par le calcul précédent ce qui décale la zone d'habitabilité vers des orbites un peu plus élevées que celles trouvées.

Architecture moléculaire (CCP, PSI, 2012, extrait)

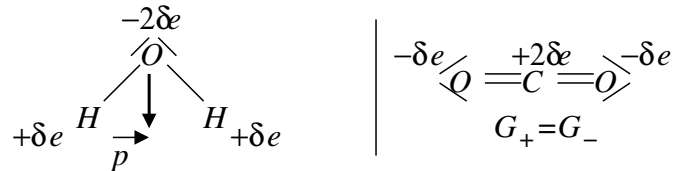
1. $H : 1s^1$; $C : 1s^2 2s^2 2p^2$; $O : 1s^2 2s^2 2p^4$ ($\uparrow\downarrow \uparrow \uparrow$).

2. Molécule d'eau :

Il y a $2 \times 1 + 6 = 8$ électrons de valence à répartir ; la molécule d'eau de type AX_2E_2 a une **géométrie coudée**.

Molécule de dioxyde de carbone :

Il y a $4 + 2 \times 6 = 16$ électrons de valence donc 8 doublets à répartir ; la molécule de type AX_2 a une **géométrie linéaire**.

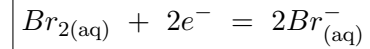


3. Le dioxygène est plus électronégatif que l'hydrogène et le carbone, les liaisons sont polarisées. Cependant, dans le cadre de ce modèle, **seule la molécule d'eau est polaire**, car, pour le dioxyde de carbone, les barycentres des charges positives et négatives sont confondus.

Cinétique chimique (Mines-Ponts, PSI, 2012 extrait)

1. Cette réaction, opposée à une réaction de dismutation, s'appelle **médiamutation**.

2. Demi-équations :



3. Par définition, $v = k[BrO_3^-]^a [Br^-]^b [H_3O^+]^c$

4. Br^- et H_3O^+ sont introduits en très large excès. On peut donc considérer leurs concentrations comme quasiment constantes au cours de l'expérience. La vitesse volumique prend la forme simplifiée :

$$v = k_{app}[BrO_3^-]^a \quad \text{avec} \quad k_{app} = k[Br^-]^b [H_3O^+]^c$$

5. Le temps de demi-réaction est la durée nécessaire pour que la moitié des ions bromate introduits initialement aient été consommés.

$$\text{Graphiquement : } \tau_{1/2} = 1,9 \times 10^3 \text{ s}$$

6. On note $C = [BrO_3^-]$.

$$\text{Cas d'un ordre 1 : } v = -\frac{dC}{dt} = k_{app}C \quad \text{donc} \quad C(t) = C_0 e^{-k_{app}t}$$

$$\text{Cas d'un ordre 2 : } v = -\frac{dC}{dt} = k_{app}C^2 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{C(t)} = \frac{1}{C_0} + k_{app}t$$

7. La figure (4) montre que $\ln C$ est une fonction affine du temps, ce qui est compatible avec une hypothèse d'ordre 1 pour laquelle : $\ln C = \ln C_0 - k_{app}t$. La figure (5) montre que $1/C$ n'est pas une fonction affine du temps ce qui contredit l'hypothèse d'un ordre 2.

On retient donc l'hypothèse d'un ordre 1, $a = 1$.

8. Avec une concentration fixée en ions bromate, la vitesse initiale de réaction prend la forme :

$$v_0 = k'_{app}[Br^-]_0^b [H_3O^+]_0^c$$

Ordre partiel par rapport aux ions bromure :

D'après le tableau, si la concentration en ions bromure augmente de 50% (expériences 1 et 2), la vitesse initiale augmente aussi de 50%, donc $b = 1$.

Ordre partiel par rapport aux ions oxonium :

D'après le tableau, si la concentration en ions oxonium double (expériences 1 et 3), la vitesse initiale est multipliée par 4, donc $c = 2$.