Sujet 09. Effet Magnus. Correction

1 Cylindre immobile

1. L'écoulement étant supposé incompressible, $\mathrm{div}\vec{v} = 0$, on en déduit, pour cet écoulement irrotationnel :
$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\Phi = 0}$$

2. L'équation étant linéaire, vérifions que chacune des fonctions proposées vérifie l'équation précédente :
$$\Delta(r\cos(\theta)) = \frac{\cos(\theta)}{r} - \frac{r\cos(\theta)}{r^2} = 0$$
$$\Delta\left(\frac{\cos(\theta)}{r}\right) = \frac{\cos(\theta)}{r^3} - \frac{\cos(\theta)}{r^3} = 0$$
La fonction proposée est donc bien solution d'une équation de Laplace.

3. On commence par exprimer le champ des vitesses en coordonnées cylindriques :
$$\vec{v} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\left(A - \frac{B}{r^2}\right)\vec{u}_r - \sin(\theta)\left(A + \frac{B}{r^2}\right)\vec{u}_\theta$$
 — *à grande distance* : $\vec{v} \sim_{r\to\infty} A\left[\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta\right] = A\vec{u}_x$
 À grande distance ($r \gg R$), l'écoulement ne doit pas être influencé par l'obstacle, en conséquence $\vec{v} \sim_{r\to\infty} v_\infty\vec{u}_x$
 De la comparaison des deux expressions, on déduit $\boxed{A = v_\infty}$.
 — *au niveau du cylindre* : En $r = R$, $\forall\theta$, $\vec{v}.\vec{u}_r = 0$ ce qui impose :
$$A - \frac{B}{R^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{B = R^2 v_\infty}$$
Ce qui donne finalement pour l'expression du champ des vitesses :
$$\boxed{\vec{v} = v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos(\theta)\vec{u}_r - v_\infty\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin(\theta)\vec{u}_\theta}$$

2 Cylindre en rotation

1. On ajoute le champ de vitesses dû à la rotation du cylindre :
$$\boxed{\vec{v} = v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos(\theta)\vec{u}_r - v_\infty\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin(\theta)\vec{u}_\theta + \frac{\omega R^2}{r}\vec{u}_\theta}$$

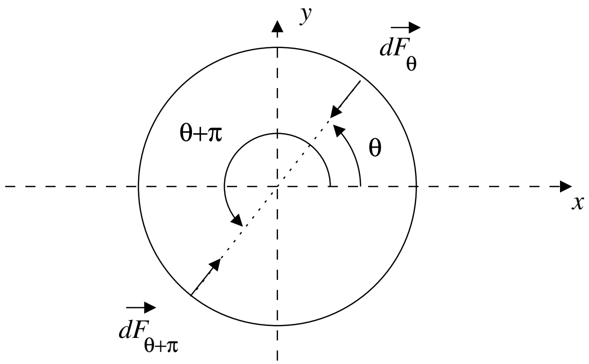
2. Un point d'arrêt correspond à un point de vitesse nulle.
 — *points d'arrêt sur le cylindre* : avec $r = R$, cela impose :
$$2v_\infty\sin(\theta) = \omega R \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\theta) = \frac{\omega}{\omega_c}$$
 Pour $\omega < \omega_c$, il y a donc deux points d'arrêt sur le cylindre symétriques par rapport à l'axe (Oy) en conformité avec le schéma de gauche.
 — *points d'arrêt hors du cylindre* : annuler la vitesse radiale consiste à imposer $\theta = \pm\pi/2$, l'annulation de la vitesse orthoradiale impose :
$$v_\infty\sin(\theta)\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) = \omega\frac{R^2}{r}$$
 Pour $\omega > 0$, on se limite à $\theta = \pi/2$ et en posant $u = r/R$, on obtient :
$$\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) = 2\frac{\omega}{\omega_c} \times \frac{1}{u} \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - 2\frac{\omega}{\omega_c}u + 1 = 0$$
 La présence de solutions réelles impose $\omega > \omega_c$. On conserve la racine vérifiant $r > R$, c'est à dire :
$$r = R\left[\frac{\omega}{\omega_c} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 1}\right]$$
 Pour $\omega > \omega_c$, il y a un point d'arrêt hors du cylindre situé sur l'axe (Oy) en conformité avec la figure de droite.
 Notons que pour la valeur de tracé $\omega = 1,1\omega_c$, on a : $r \simeq 1,6R$, ce qui semble là encore cohérent avec la figure.

3. On applique la loi de Bernoulli pour une ligne de champ partant de l'infini et passant par un point $M(R,\theta)$ au voisinage immédiat du cylindre pour lequel $\vec{v}(R,\theta) = \left[\omega R - 2v_\infty\sin(\theta)\right]\vec{u}_\theta$:
$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{P(\theta)}{\rho} + \frac{\left[\omega R - 2v_\infty\sin(\theta)\right]^2}{2}$$
On en déduit :
$$\boxed{P(\theta) = P_0 + \frac{\rho v_{\infty^2}}{2}\left[1 - 4\sin^2(\theta)\right] - \frac{\rho\omega^2R^2}{2} + 2\rho R\omega v_\infty\sin(\theta)}$$

4. Pour les termes constants ou variant comme $\sin^2(\theta)$, les forces de pression sont opposées en θ et $\theta+\pi$ et se compensent (Cf. figure ci-après). Il y a donc simplement à tenir compte du terme en $\sin(\theta)$ en pensant bien à projeter sur la base cartésienne.
$$\vec{F} = \int_0^{2\pi}\int_{z=0}^{\ell}\left[2\rho v_\infty R\omega\sin(\theta)\right]dzRd\theta(-\vec{u}_r)$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{F} = -2\rho v_\infty R^2 \omega \ell \left[\int_0^{2\pi} \sin(\theta)\cos(\theta) d\theta \vec{u}_x + \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \vec{u}_y \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -2\pi\rho v_\infty R^2 \omega \ell \vec{u}_y}$$



D'après la loi de Bernoulli les zones de forte vitesse sont des zones de basse pression et inversement.
Pour un cylindre tournant avec $\omega > 0$, les zones de forte vitesse et donc de basse pression sont situées dans les $y < 0$, la force de portance s'exerce donc vers les $y < 0$. La symétrie amont/aval de l'écoulement supprime toute force selon (Ox).

5. Avec $V = \ell \times \pi R^2$, $\Omega = \omega \vec{u}_z$ et $\vec{v}_\infty = v_\infty \vec{u}_x$, l'expression prend la forme :

$$\boxed{\vec{F} = K\rho V \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_\infty \quad \text{avec} \quad K = -2}$$