Sujet 08. CS PSI 2012. Bolide, traversée atmosphère. Correction

1 Puissance dissipée

La puissance dissipée est le produit de la force par la vitesse :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{2} C\rho\pi r_b^2 v^3}$$

Application numérique :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1,2 \times \pi \times 80^2 \times (20 \times 10^3)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P} = 1,9 \times 10^8 \text{ GW}}$$

Il s'agit bien sûr d'une puissance considérable équivalent à des centaines de millions de centrale nucléaire.

2 Vitesse du son dans l'air

Cf. cours.

3 Lois de conservation de l'écoulement à travers l'onde de choc

1. $c_1 = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M_{\text{air}}}} = \sqrt{\dfrac{7 \times 8,31 \times 298}{29 \times 10^{-3}}} = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et pour le nombre de Mach :
$$\mathcal{M}_1 = \frac{20 \times 10^3}{3,4 \times 10^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{M}_1 = 59}$$

2. On considère comme **système fermé**, le système constitué à l'instant t de l'air contenu dans la surface de contrôle auquel on ajoute l'air qui s'apprête à entrer dans la surface de contrôle pendant dt.

   En régime permanent, la masse qui entre pendant dt dans la zone (1) doit sortir de la zone (2) durant cette même durée, ce qui s'écrit :
$$\rho_1 v_1 S dt = \rho_2 v_2 S dt \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (R_1)}$$

3. On effectue un bilan de quantité de mouvement pour le système fermé précédemment décrit. L'écoulement étant permanent, la variation de quantité de mouvement s'identifie à la différence des petites quantités de mouvement qui sortent et entrent pendant dt :
$$d\vec{p} = \left(\delta\vec{p}_2 + \cancel{p_\Sigma(t+dt)}\right) - \left(\delta\vec{p}_1 + \cancel{p_\Sigma(t)}\right) = \delta\vec{p}_2 - \delta\vec{p}_1 = [\rho_2 v_2 dt S v_2 - \rho_1 v_1 dt S v_1]\,\vec{u}_x$$

   Les forces s'identifient aux forces de pression en amont et en aval :
$$d\vec{p} = \vec{F}dt \quad \Leftrightarrow \quad [\rho_2 v_2 S dt v_2 - \rho_1 v_1 S dt v_1]\,\vec{u}_x = [P_1 S - P_2 S]\,dt\vec{u}_x$$

   On en déduit : $\boxed{\rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2 = P_1 - P_2 \quad (R_2)}$

4. On applique le premier principe industriel pour cet écoulement permanent. En l'absence de travail utile et de transfert thermique, la somme de l'énergie cinétique massique et de l'enthalpie massique se conserve entre l'amont et l'aval :
$$\boxed{h_2 - h_1 + \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = 0 \quad (R_3)}$$

5. Pour un gaz parfait, la relation de Mayer assure que $c_p - c_v = \dfrac{R}{M_{\text{air}}}$; avec $\gamma = c_p/c_v$, on obtient $c_p = \dfrac{\gamma R}{(\gamma-1)M_{\text{air}}}$.

   La seconde loi de Joule assure que l'enthalpie massique ne dépend que de la température, on en déduit :
$$\boxed{h_2 - h_1 = \frac{\gamma R}{(\gamma-1)M_{\text{air}}}(T_2 - T_1)}$$

   Et compte tenu de la loi des gaz parfaits $P = \rho RT/M_{\text{air}}$:
$$\boxed{h_2 - h_1 = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}\right) \quad (R_4)}$$

6. En combinant (R_3) et (R_4) :
$$\boxed{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}\right) + \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = 0 \quad (R_5)}$$

4 Caractérisation thermodynamique du gaz choqué

1. À l'aide des relations fournies :
$$\mathcal{M}_2 = \frac{v_2}{c_2} = \frac{1}{c_2} \times \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_1 = \sqrt{\frac{\rho_2}{\gamma P_2}} \times \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\sqrt{\frac{(\gamma+1)P_2}{2\rho_1}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\gamma P_2}} \times \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \times \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\sqrt{\frac{(\gamma+1)P_2}{2\rho_1}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathcal{M}_2 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}$$

Application numérique : $\mathcal{M}_2 = \sqrt{\dfrac{7/5-1}{2\times 7/5}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{M}_2 = 0,38}$.

2. De la même manière :
$$T_2 = \frac{P_2 M_{\text{air}}}{\rho_2 R} = \frac{2\rho_1 v_1^2}{(\gamma+1)\rho_2} \times \frac{M_{\text{air}}}{R} = \frac{2v_1^2}{(\gamma+1)} \times \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \times \frac{M_{\text{air}}}{R}$$
Application numérique :
$$T_2 = 2\times(20\times10^3)^2 \times \frac{7/5-1}{(1+7/5)^2} \times \frac{29\times10^{-3}}{8,31} \quad \boxed{T_2 = 1,9\times10^5\ \text{K}}$$
3. A cette température, on ne peut plus avoir $\gamma = 7/5$, les entités présentes ne sont plus des molécules diatomiques. **La température atteinte est nécessaire plus faible**, par exemple du fait de l'énergie utilisée pour dissocier et ioniser les molécules.

5 Masse perdue et échauffement du bolide

1. Pendant une durée dt, on considère qu'une masse δm se vaporise sous l'effet de la puissance apportée ce qui s'écrit :
$$\delta m \times h_v = \mathcal{P}_r dt = 4\pi r_b^2 c_a \sigma T_2'^4 dt \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\delta m}{dt} = \frac{4\pi r_b^2 c_a \sigma T_2'^4}{h_v}}$$
2. $\boxed{t_a = \dfrac{H_a}{v\cos(\theta)}}$ et $\boxed{\Delta m_{\max} = \dfrac{4\pi r_b^2 \sigma T_2'^4}{h_v} \times t_a}$.
On a retenu $c_a = 1$, avec un coefficient d'absorption optimal, la puissance reçue est maximisée.
3. Applications numériques.
$$t_a = \frac{8,5}{20\times\sqrt{2}/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_a = 0,6\ \text{s}}$$
$$\Delta m_{\max} = \frac{4\pi\times(80)^2\times5{,}67\times10^{-8}\times(20\times10^3)^4}{8,0\times10^6}\times 0,6 \quad \Delta m_{\max} = 5,5\times10^7\ \text{kg}$$
En comparant à la masse initiale : $m = \rho_b \times \dfrac{4\pi}{3} r_b^3 = 5,4\times10^9$ kg, **la perte relative de masse est de l'ordre de 1%**, on pouvait donc bien considérer que le bolide conserve sa masse.
4. L'équation de la chaleur prend la forme :
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_b}{\rho_b c_b}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
Le terme $\dfrac{\lambda_b}{\rho_b c_b}$ est homogène à une longueur au carré divisé par un temps. En la durée t_a de traversée, le transfert thermique se propage sur une épaisseur δ_b telle que :
$$\frac{\delta_b^2}{t_a} = \frac{\lambda_b}{\rho_b c_b} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\delta_b = \sqrt{\frac{\lambda_b t_a}{\rho_b c_b}}}$$
Application numérique :
$$\delta_b = \sqrt{\frac{5,0\times0,6}{2,5\times10^3\times800}} \quad \Rightarrow \boxed{\delta_b \approx 1\ \text{mm}}$$
Durant la traversée de l'atmosphère, le transfert thermique n'a pas le temps de diffuser au sein du matériau ; il n'est donc pas légitime de traiter le bolide comme un bloc qui s'échaufferait de manière uniforme.