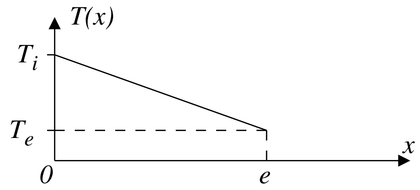
Sujet 07. CCP PC 2014. Diffusion thermique. Correction

1 Gradient de température

1. En régime stationnaire, en l'absence d'apports en volume et de pertes latérales, le flux thermique entrant en x sort en $x+dx$. La section étant constante, on déduit que le vecteur courant thermique ne dépend pas de x :
$$j_x(x) = cste \quad \Rightarrow \quad -\lambda\frac{dT}{dx} = cste$$
On intègre alors cette équation en tenant compte des conditions aux limites :
$$\boxed{T(x) = T_i + \frac{T_e - T_i}{e}x}$$
Représentation graphique :



2. En utilisant la loi de Fourier :
$$\vec{j}_Q = \lambda\frac{T_i - T_e}{e}\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \boxed{\Phi(A) = \frac{\lambda A}{e}(T_i - T_e)}$$
Le vecteur courant est une puissance surfacique, en utilisant la loi de Fourier on en déduit que λ s'exprime en $\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$ dans le système international d'unités.

3. Aire corporelle totale : $\boxed{A_1 = 2a^2 + 4al}$.

4. À l'équilibre thermique, la puissance apportée doit compenser les pertes :
$$\mathcal{P}_1 = \Phi(A_1) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_1 = \frac{\lambda A_1}{e}(T_i - T_e)$$
$$\boxed{\lambda = \frac{\mathcal{P}_1 e}{(T_i - T_e)(2a^2 + 4al)}}$$
Application numérique : $\boxed{\lambda = 40\ \mathrm{mW \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}}$.

5. $A_9 = 12al + 18a^2$ et $P_9 = \dfrac{\lambda A_9(T_i - T_e)}{e}$.
Application numérique :
$$A_9 = 12 \times 0,20 \times 0,50 + 18 \times 0,1^2 \quad A_9 = 0,78\ \mathrm{m}^2$$
$$P_9 = \frac{0,78 \times 0,040 \times 57}{0,01} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_9 = 18 \times 10^2\ \mathrm{W}}$$
Une puissance d'environ $180/9 = 20$ W par manchot qui ne représente que 40% de la puissance que doit fournir un manchot isolé.

2 Équation de la chaleur

1. Contrairement à la convection thermique, la diffusion thermique correspond à un transfert thermique en l'absence de déplacement macroscopique du milieu. **La convection thermique est en général plus efficace**.

2. Considérons la fonction $f : (r,t) \to \dfrac{1}{t^{3/2}}\exp\left(-\dfrac{r^2}{Ct}\right)$:
$$\to \frac{\partial f}{\partial t} = \left(-\frac{3}{2t^{5/2}} + \frac{r^2}{Ct^{7/2}}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{Ct}\right)$$
$$\to \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{-2r}{Ct^{5/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{Ct}\right)$$
$$\to \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \left(-\frac{2}{Ct^{5/2}} + \frac{4r^2}{C^2t^{7/2}}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{Ct}\right)$$
En reportant ces expressions dans l'équation de diffusion, on en déduit $\boxed{C = 4D}$.

3. $\boxed{T_O(t) = \dfrac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}}$.

À t fixé, on cherche à déterminer la largeur à mi-hauteur de la fonction $T(r,t)$. Il s'agit de résoudre :
$$\frac{1}{(\pi 4Dt)^{3/2}}\exp\left(-\frac{R(t)^2}{4Dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad R(t)^2 = 4Dt\ln(2)$$
$$\boxed{R(t) = \sqrt{4Dt\ln(2)}}$$
On retrouve l'idée que **la distance de diffusion augmente comme la racine du temps écoulé**.

3 Diffusion en présence de convection

1. Au sein de la boule et en l'absence d'apports en volume, la température vérifie l'équation de diffusion fournie dans la deuxième partie :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = 0}$$

2. <u>Le flux est continu à la surface de la boule</u>. On peut donc écrire l'égalité des flux surfaciques, en utilisant la loi de Fourier pour $r = R_s^-$ et la loi de Newton fournie dans l'énoncé pour $r = R_s^+$.
3. T_e étant une grandeur constante, les dérivées partielles de T et de Θ sont identiques :

$$\boxed{\frac{\partial \Theta}{\partial t} - D\Delta\Theta = 0 \quad \text{et} \quad -\lambda\left(\frac{\partial \Theta}{\partial r}\right)_{r=R_s^-} = h\Theta_s}$$

4. On cherche une solution sous la forme $\Theta(r,t) = f(r)g(t)$, expression que l'on reporte dans l'équation de diffusion :

$$f(r)g'(t) - Dg(t)\Delta f(r) = 0$$

$$f(r)g'(t) - Dg(t)\left(\frac{2}{r}f'(r) + f''(r)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{f(r)}\left(\frac{2}{r}f'(r) + f''(r)\right) = \frac{g'(t)}{g(t)}$$

Le membre de gauche est une fonction de la variable r, celui de droite de la variable t, la seule solution pour que les deux puissent être égaux $\forall r < R_s$ et $\forall t > 0$ est que les deux fonctions soient constantes, ce qui impose :

$$\frac{D}{f(r)}\left(\frac{2}{r}f'(r) + f''(r)\right) = \frac{g'(t)}{g(t)} = A$$

A est homogène à l'inverse d'un temps comme le montre le membre de droite de l'équation. De plus $\Theta(r,t)$ représente l'écart à la température extérieure qui tend nécessairement vers 0 quand $t \to +\infty$. La fonction g doit être une fonction décroissante du temps, ce qui impose $A < 0$ et finalement :

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = A = -\frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(t) = g(0)e^{-t/\tau}}$$

5. La fonction proposée doit vérifier l'équation :

$$\frac{2}{r}f'(r) + f''(r) = -\frac{1}{\tau D}f(r)$$

$$\to f'(r) = -\frac{1}{r^2}\sin(\alpha r) + \frac{\alpha}{r}\cos(\alpha r)$$

$$\to f''(r) = \frac{2}{r^3}\sin(\alpha r) - \frac{2\alpha}{r^2}\cos(\alpha r) - \frac{\alpha^2}{r}\sin(\alpha r)$$

En reportant dans l'équation, on en déduit $\boxed{\alpha^2 D\tau = 1}$.

$$\boxed{\lim_{r\to 0} f(r) = \alpha = \frac{1}{\sqrt{D\tau}}}.$$

6. Exprimons chacun des membres de l'équation :

$$\to -\lambda\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)_{r=R_s} = -\lambda g(t)\left(-\frac{1}{R_s^2}\sin(\alpha R_s) + \frac{\alpha}{R_s}\cos(\alpha R_s)\right)$$

$$\to h\Theta_s = hg(t)\frac{\sin(\alpha R_s)}{R_s}$$

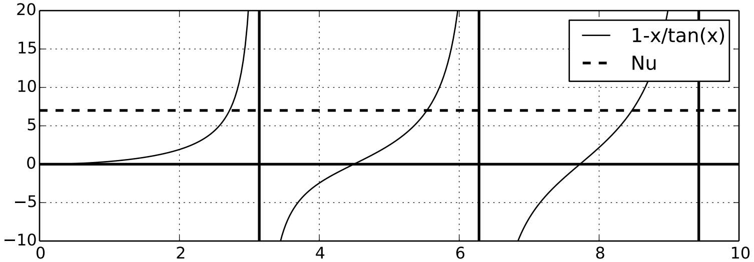
La comparaison des deux expressions conduit à la relation proposée :

$$\boxed{1 - x\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{hR_s}{\lambda}}$$

7. Pour obtenir le premier terme non nul, il faut développer la tangente à l'ordre 3 :

$$1 - \frac{x}{\tan(x)} \simeq 1 - \frac{x}{x + x^3/3} \simeq 1 - \frac{1}{1 + x^2/3} \simeq 1 - (1 - x^2/3) \simeq x^2/3$$

On trace alors l'allure de la courbe :



La fonction étant une fonction croissante et continue sur $[0,\pi[$ variant de O à $+\infty$, elle passe nécessairement par la valeur Nu. L'équation admet bien une solution unique sur l'intervalle $[0,\pi[$

8. D'après le tracé précédent, pour $Nu \ll 1$, on peut approximer la fonction par son équivalent en $x = 0$:

$$Nu = \frac{x^2}{3} = \frac{\alpha^2 R_s^2}{3} = \frac{R_s^2}{3D\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{R_s^2}{3DN_u}}$$

Pour $Nu \gg 1$, $x \simeq \pi$, $\dfrac{R_s}{\sqrt{D\tau}} = \pi$, donc $\boxed{\tau = \dfrac{R_s^2}{\pi^2 D}}$

9. $Nu \simeq 16,7 \times 10^{-3} \ll 1$, on utilise donc la première formule :

$$\tau = \frac{0,1^2}{3 \times 16,7 \times 10^{-3} \times (35/(1,13 \times 10^4 \times 130)} \quad \text{donc} \quad \boxed{\tau \simeq 2 \text{ h } 20'}$$