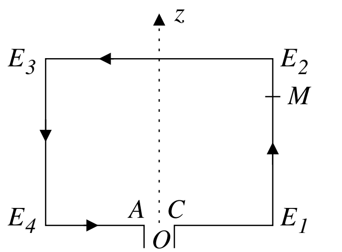
Sujet 06. CS PSI 2015. Moteur courant continu. Correction

1 Principe d'une machine à courant continu à charge constante

1. On calcule la composante du couple par rapport à l'axe (Oz). On remarque que sur les portions E_2E_3, E_4A et CE_1, $\vec{dl}$ et $\vec{B}$ sont parallèles et la contribution de ces termes au couple est nul :



$$\Gamma = \left[\int_C^A \overrightarrow{OM} \wedge \left(i\vec{dl} \wedge \vec{B}\right)\right].\vec{u}_z$$

$$\Gamma = \left[\int_{E_1}^{E_2} \overrightarrow{OM} \wedge \left(i\vec{dl} \wedge \vec{B}\right)\right].\vec{u}_z + \left[\int_{E_3}^{E_4} \overrightarrow{OM} \wedge \left(i\vec{dl} \wedge \vec{B}\right)\right].\vec{u}_z$$

Avec :

$$\left[\int_{E_1}^{E_2} \overrightarrow{OM} \wedge \left(i\vec{dl} \wedge \vec{B}\right)\right].\vec{u}_z = \left[\int_{E_1}^{E_2} \left(\frac{a}{2}\vec{e}_{r1} + z\vec{u}_z\right) \wedge \left(idz\vec{u}_z \wedge B_0\cos\theta\vec{e}_{r1}\right)\right].\vec{u}_z$$
$$= \frac{a}{2} ibB_0\cos(\theta)$$

On obtient un résultat identique pour le second terme, donc pour une spire :

$$\Gamma = abB_0\cos(\theta) i$$

Sur un tour $\langle\cos(\theta)\rangle = 0$ et **le couple est donc nul en moyenne**. Ce résultat est bien sûr applicable à chacune des N spires.

2. Le système **balai-collecteur** permet l'inversion du courant pour les angles $\theta = \pi/2$ et $\theta = -\pi/2$.

Pour calculer le nouveau couple moyen, on reprend l'expression précédemment obtenue mais on tient maintenant compte du fait que l'intensité est une fonction de θ :

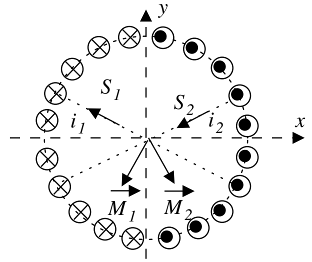
$$\langle\Gamma_{em}\rangle = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} abB_0 i\cos\theta d\theta + \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/2} abB_0(-i)\cos\theta d\theta\right]$$

$$\langle\Gamma_{em}\rangle = \frac{abB_0 i}{2\pi}\left([\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} - [\sin\theta]_{\pi/2}^{3\pi/2}\right) \quad\Rightarrow\quad \langle\Gamma_{em}\rangle = \frac{2abB_0 i}{\pi}$$

Chacune des spires subit ce couple, en conséquence dans le cas de N spires :

$$\langle\Gamma_{em}\rangle = \frac{2NabB_0 i}{\pi} \quad \text{donc} \quad \boxed{K_0 = \frac{2abB_0N}{\pi}}$$

3. Une spire donnée parcourue par un courant d'intensité i et de section S est équivalente à un moment magnétique $\vec{M} = i\vec{S}$:



Comme le montre le schéma ci-dessus, les moments magnétiques sont, par symétrie, globalement dirigés selon $-\vec{u}_y$: $\vec{M}_r = -M_r\vec{u}_y$ avec $M_r > 0$ et proportionnel à i car toutes les spires sont parcourues par le même courant i.

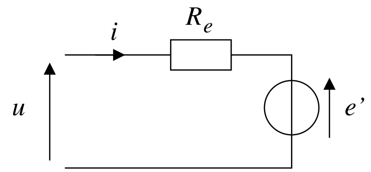
En suivant la proposition (discutable ?) de l'énoncé, on applique la formule du couple électromagnétique qui s'exerce sur un dipôle magnétique :

$$\vec{\Gamma}_{em} = -M_r\vec{u}_y \wedge B_s\vec{u}_x \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}'_{em} = M_rB_s\vec{u}_z}$$

En présence d'un matériau ferromagnétique le champ magnétique est renforcé et le couple est nécessairement plus important dans ce second cas.

4. Dans le cas d'un couplage parfait : $\Gamma'_{em}\Omega = e'i$, donc $\boxed{e' = K\Omega}$.

5. Commençons par représenter le schéma de l'induit (rotor) :



L'équation électrique s'écrit :

$$U = R_ei + e' = R_ei + K\Omega \quad\Rightarrow\quad \Omega = \frac{U - R_ei}{K}$$

Avec $\Gamma'_{em} = Ki$, on en déduit :

$$\boxed{\Omega = \frac{U}{K} - \frac{R_e}{K^2}\Gamma'_{em}}$$

6. On applique le théorème du moment cinétique pour le rotor :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = \Gamma'_{em} - \Gamma_R$$

Avec $\Gamma'_{em} = Ki$ et $U = R_e i + K\Omega$, on obtient $\Gamma'_{em} = K\left(\frac{U - K\Omega}{R_e}\right)$ et donc :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = \frac{KU}{R_e} - \frac{K^2\Omega}{R_e} - \Gamma_R \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\Omega}{dt} + \frac{K^2}{R_e J}\Omega = \frac{1}{J}\left(\frac{KU}{R_e} - \Gamma_r\right)}$$

On en déduit $\tau = \frac{R_e J}{K^2}$ et $\frac{\Omega_{lim}}{\tau} = \frac{1}{J}\left(\frac{KU}{R_e} - \Gamma_R\right)$.

Partant d'une vitesse de rotation nulle, on en déduit :

$$\boxed{\Omega(t) = \Omega_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Et donc pour l'angle :

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \Omega_{lim}t + \Omega_{lim}\tau e^{-t/\tau} + cste$$

Avec la condition initiale, $\theta(0) = 0 = \Omega_{lim}\tau + cste$, on obtient finalement :

$$\boxed{\theta(t) = \Omega_{lim}t + \Omega_{lim}\tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)}$$

7. L'annulation du courant dans l'induit supprime le couple électromagnétique, l'équation mécanique prend la forme simplifiée :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = -\Gamma_R \quad \Rightarrow \quad \Omega(t) = -\frac{\Gamma_R}{J}t + cste$$

Compte tenu de la condition initiale : $\Omega(t_0) = \Omega_0$, on en déduit :

$$\boxed{\forall t \geq t_0 \quad \Omega(t) = \Omega_0 + \frac{\Gamma_R}{J}(t_0 - t)}$$

On détermine alors l'angle :

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega_0 + \frac{\Gamma_R}{J}(t_0 - t) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \Omega_0 t - \frac{\Gamma_R}{J}\frac{(t_0 - t)^2}{2} + cste$$

Avec $\theta(t_0) = \theta_0$: $\boxed{\forall t \geq t_0 \quad \theta(t) = \Omega_0(t - t_0) - \frac{\Gamma_R}{2J}(t_0 - t)^2 + \theta_0}$.

8. Le rotor est à l'arrêt en t_{mp} tel que $0 = \Omega(t_{mp}) = \Omega_0 + \frac{\Gamma_r}{J}(t_0 - t_{mp})$, c'est à dire :

$$\Omega_{lim}\left(1 - e^{-t_0/\tau}\right) + \frac{\Gamma_R}{J}(t_0 - t_{mp}) = 0$$

$$\boxed{t_{mp} = t_0 + \frac{J\Omega_{lim}}{\Gamma_R}\left(1 - e^{-t_0/\tau}\right)}$$

On peut alors déterminer $\theta(t_{mp})$:

$$\theta_{mp} = \theta_0 + \frac{\Omega_0 J\Omega_{lim}}{\Gamma_R}\left(1 - e^{-t_0/\tau}\right) - \frac{\Gamma_R}{2J} \times \frac{J^2\Omega_{lim}^2}{\Gamma_R^2}\left(1 - e^{-t_0/\tau}\right)^2$$

Avec $\theta_0 = \Omega_{lim}t_0 + \Omega_{lim}\tau\left(e^{-t_0/\tau} - 1\right)$ et $\Omega_0 = \Omega_{lim}\left(1 - e^{-t_0/\tau}\right)$, on en déduit finalement :

$$\boxed{\theta_{mp} = \Omega_{lim}t_0 + \Omega_{lim}\tau\left(e^{-t_0/\tau} - 1\right) + \frac{J\Omega_{lim}^2}{2\Gamma_R}\left(1 - e^{-t_0/\tau}\right)^2}$$

2 Application au moteur DN12M

1. En utilisant la courbe en trait plein et sachant que $\Gamma'_{em} = Ki$, on en déduit :

$$K = \frac{\Gamma'_{em}}{i} = \frac{1,1 \text{ mN.m}}{400 \text{ mA}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = 2,7 \times 10^{-3} \text{ Wb}}$$

Comme $\Omega = \frac{u}{K} - \frac{R_e\Gamma'_{em}}{K^2}$, la pente vaut $-R_e/K^2$:

$$R_e = \frac{12100 \times 2\pi/60}{1,2 \times 10^{-3}} \times (2,75 \times 10^{-3})^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_e = 8,0\ \Omega}$$

2. Le couple de démarrage est le couple à vitesse angulaire nulle, c'est à dire :

$$\boxed{\Gamma_D = 1,2 \text{ mN.m}}$$

3. $\tau = \frac{R_e J}{K^2} = \frac{8,0 \times 0,24 \times 10^{-3} \times 10^{-4}}{(2,7 \times 10^{-3})^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 26 \text{ ms}}$.

Au démarrage, la relation entre la tension et le couple électromoteur prend la forme simplifiée :

$$\Gamma_D = \frac{KU}{R_e} \quad \Leftrightarrow \quad U = \frac{R_e\Gamma_D}{K} = \frac{8,0 \times 1,2 \times 10^{-3}}{2,7 \times 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = 3,6 \text{ V}}$$

4. Comme $\Omega_{lim} = \frac{U}{K} - \frac{R_e\Gamma_R}{K^2}$, on en déduit :

$$\Omega_{lim} = \frac{3,1}{2,7 \times 10^{-3}} - \frac{8 \times 0,6 \times 10^{-3}}{(2,7 \times 10^{-3})^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_{lim} = 4,9 \times 10^2 \text{ rad.s}^{-1}}$$

En régime permanent le couple moteur doit équilibrer le couple résistant, ce qui donne pour la puissance du moteur :

$$P = \Gamma_r \times \Omega_{lim} = 0,6 \times 10^{-3} \times 4,9 \times 10^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 0,29 \text{ W}}$$

5. L'énoncé ne fournit pas t_0 ; faisons l'hypothèse que le moteur atteigne sa vitesse limite dans la phase motrice $\Omega(t_0) = \Omega_{lim}$, c'est à dire $e^{-t_0/\tau} \simeq 0$.
Le relation entre t_{mp} et t_0 (question 8.) s'écrit alors :

$$t_0 = t_{mp} - \frac{J\Omega_{lim}}{\Gamma_r} = 0,1 - \frac{0,24 \times 10^{-7} \times 4,9 \times 10^2}{0,5 \times 1,2 \times 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad t_0 \simeq 80 \text{ ms}$$

On peut alors en déduire θ_{mp} (avec $e^{-t_0/\tau} \simeq 0$) :

$$\theta_{mp} = 4,9 \times 10^2 \times 80 \times 10^{-3} - 4,9 \times 10^2 \times 26 \times 10^{-3} + \frac{0,24 \times 10^{-7} \times (4,9 \times 10^2)^2}{1,2 \times 10^{-3}}$$

C'est à dire $\boxed{\theta_{mp} \simeq 31 \text{ rad}}$, environ 5 tours.