Sujet 04. CS TSI 2017. Couche anti-reflet. Correction

1. Les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère s'écrivent dans ces milieux non conducteurs :
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday et sachant que le milieu est vide de charges ($\mathrm{div}\vec{E} = 0$), on en déduit, avec c la célérité de la lumière dans le vide :
$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \text{avec} \quad v^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \times \frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{c^2}{\varepsilon_r}$$
On a donc bien $v = c/n$ avec $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r}}$.
2. Pour une OPPH se propageant dans un milieu d'indice n, on a :
$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{u} = \frac{n\omega}{c}\vec{u} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{n\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}}$$
Dans le cas présent, on en déduit :
$$\boxed{\vec{B} = \frac{nE_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z}$$

Coefficients de transmission et réflexion en énergie à l'interface entre deux milieux

1. La continuité du champ électrique impose :
$$\vec{E}_i(x = 0^-, t) + \vec{E}_r(x = 0^-, t) = \vec{E}_t(x = 0^+, t) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{1 + \rho = \tau}$$
En tenant compte que l'onde réfléchie se propage dans le sens des x décroissants, les champs magnétiques ont pour expression :
$$\vec{B}_i = \frac{n_1 E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z \ ; \ \vec{B}_r = -\frac{n_1\rho E_0}{c}\cos(\omega t + kx)\vec{u}_z$$
$$\vec{B}_t = \frac{n_2\tau E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$$
La continuité du champ magnétique en $x = 0$ impose :
$$\vec{B}_i(x = 0^-, t) + \vec{B}_r(x = 0^-, t) = \vec{B}_t(x = 0^+, t) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{n_1 - n_1\rho = n_2\tau}$$
En combinant les deux relations, on en déduit :
$$\boxed{\rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}} \text{ et } \boxed{\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}}$$
2. Pour l'onde incidente, le vecteur de Poynting a pour expression :
$$\vec{\Pi}_i(x, t) = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{n_1 E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{u}_x$$
Et, en moyenne dans le temps : $\left\langle \|\vec{\Pi}_i\| \right\rangle = \dfrac{n_1 E_0^2}{2\mu_0 c}$.
De même pour les ondes réfléchie et transmise :
$$\left\langle \|\vec{\Pi}_r\| \right\rangle = \frac{\rho^2 n_1 E_0^2}{2\mu_0 c} \quad \text{et} \quad \left\langle \|\vec{\Pi}_t\| \right\rangle = \frac{\tau^2 n_2 E_0^2}{2\mu_0 c}$$
Les coefficients de réflexion et de transmission en énergie sont définis en comparant la moyenne de la norme des vecteurs de Poynting :
$$R = \frac{\left\langle \|\vec{\Pi}_r\| \right\rangle}{\left\langle \|\vec{\Pi}_i\| \right\rangle} = \rho^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2}$$
$$T = \frac{\left\langle \|\vec{\Pi}_t\| \right\rangle}{\left\langle \|\vec{\Pi}_i\| \right\rangle} = \frac{n_2\tau^2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}}$$
On constate que $\boxed{R + T = 1}$ qui caractérise la conservation de l'énergie.

Condition sur l'indice de la couche antireflet

1. Avec les relations obtenues pour les coefficients de réflexion et de transmission dans la partie précédente :
$$\boxed{\rho_{1\to N} = \frac{1 - N}{1 + N}} \ ; \ \boxed{\rho_{N\to n} = \frac{N - n}{N + n}} \ ; \ \boxed{\tau_{1\to N} = \frac{2}{N + n}} \ ; \ \boxed{\tau_{N\to 1} = \frac{2N}{N + n}}$$
2. Soit $\underline{E_0}$ l'amplitude complexe du champ électrique associée à l'onde incidente.
L'amplitude complexe de la première onde réfléchie s'écrit alors $\rho_{1\to N}\underline{E_0}$.

La seconde onde réfléchie subit :
— une transmission à l'interface air/couche anti-reflet : $\tau_{1\to N}$;
— une réflexion à l'interface couche anti-reflet/verre : $\rho_{N\to n}$;
— une transmission à l'interface couche anti-reflet/air : $\tau_{N\to 1}$;
— un déphasage dû à l'aller-retour dans le milieu n : $\exp\left(j \times N\dfrac{2\pi}{\lambda} \times 2e\right)$.

En conclusion pour l'amplitude de la deuxième onde retour :
$$\underline{a} = \underline{E_0}\tau_{1\to N}\rho_{N\to n}\tau_{N\to 1}\exp(j\varphi) \quad \text{avec} \quad \boxed{\varphi = \frac{4N\pi}{\lambda}e}$$
3. Chaque onde retour suivante doit effectuer en supplément un aller-retour dans la couche anti-reflet qui ajoute un terme de déphasage $\exp(j\varphi)$ et deux

réflexions de $N \to 1$ et $N \to n$; en conclusion l'amplitude du champ réfléchi somme des amplitudes de toutes les ondes réfléchies a pour expression :

$$\underline{A} = \underline{E}_0 \rho_{1\to N} + \underline{E}_0 \tau_{1\to N}\tau_{N\to 1}\rho_{N\to n} e^{j\varphi} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\rho_{N\to 1}\rho_{N\to n} e^{j\varphi}\right)^p$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{A} = \underline{E}_0 \rho_{1\to N} + \underline{E}_0 \tau_{1\to N}\tau_{N\to 1}\rho_{N\to n} e^{j\varphi} \frac{1}{1-\rho_{N\to 1}\rho_{N\to n} e^{j\varphi}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{A} = \underline{E}_0 \frac{\rho_{1\to N} - \rho_{1\to N}\rho_{N\to 1}\rho_{N\to n} e^{j\varphi} + \tau_{1\to N}\tau_{N\to 1}\rho_{N\to n} e^{j\varphi}}{1-\rho_{N\to 1}\rho_{N\to n} e^{j\varphi}}$$

Avec $\rho_{1\to N} = -\rho_{N\to 1}$ et $\tau_{1\to N}\tau_{N\to 1} = 1 - \rho_{1\to N}^2$, on en déduit finalement :

$$\boxed{\underline{A} = \underline{E}_0 \frac{\rho_{1\to N} + \rho_{N\to n}\exp(j\varphi)}{1 + \rho_{1\to N}\rho_{N\to n}\exp(j\varphi)}}$$

4. L'annulation de l'onde réfléchie nécessite : $\rho_{1\to N} + \rho_{N\to n}\exp(j\varphi) = 0$, c'est à dire :

$$e^{j\varphi} = \frac{N-1}{N+1} \times \frac{N+n}{N-n}$$

Comme $1 < N < n$, le terme de droite est un réel négatif, ce qui impose nécessairement $e^{j\varphi} = -1$, c'est à dire :

$$-1 = \frac{N-1}{N+1} \times \frac{N+n}{N-n} \quad \Leftrightarrow \quad (N-1)(N+n) = (N+1)(n-N)$$

$$\Leftrightarrow \quad N^2 + \cancel{Nn} - \cancel{N} - n = \cancel{Nn} - N^2 + n - \cancel{N}$$

On en déduit $N = \sqrt{n}$. On constate une **adaptation d'impédance**, l'indice retenu étant intermédiaire entre l'air d'indice 1 et le verre d'indice n.