

# 1 Lunette astronomique

## 1.1 Diamètre angulaire

1. L'angle est maximal lorsque la distance entre Jupiter et la Terre est minimale :

$$\alpha_0 = \frac{d_J}{R_J - R_T}$$

Application numérique (avec  $3600'' = 1$  degré) :

$$\alpha_0 = \frac{140 \times 10^3}{(780 - 150) \times 10^3} = 2,22 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0,01273^\circ \Rightarrow \alpha_0 = 45,8''$$

2. On applique la troisième loi de Kepler pour ces deux planètes soumises au même attracteur :

$$\frac{R_J^3}{T_J^2} = \frac{R_T^3}{T_T^2} \Rightarrow T_J = T_T \times \left(\frac{R_J}{R_T}\right)^{3/2}$$

Application numérique :

$$T_J = 365,25 \times \left(\frac{780}{150}\right)^{3/2} \Rightarrow T_J = 4,33 \times 10^3 \text{ jours}$$

3. Pour un mouvement à force centrale, la conservation du moment cinétique assure que la grandeur  $r^2\dot{\theta}$  appelée constante des aires se conserve au cours du mouvement. Pour un mouvement circulaire,  $r = R$  est une constante, il en est donc de même pour  $\dot{\theta}$  et le mouvement est donc **uniforme**.

Partant d'une situation pour laquelle l'alignement est  $S, T, J$  ; une fois que la Terre a fait un tour, elle doit faire un angle un peu supérieur du fait du déplacement de Jupiter sur son orbite, la durée recherchée vérifie donc l'équation :

$$\underbrace{\frac{2\pi}{T_T} \times t_1}_{\text{angle parcouru par la Terre}} = 2\pi + \underbrace{\frac{2\pi}{T_J} \times t_1}_{\text{angle parcouru par Jupiter}}$$

On en déduit :

$$t_1 = \frac{T_T T_J}{T_J - T_T}$$

Application numérique :

$$t_1 = \frac{365,25 \times 4331}{4331 - 365,25} \Rightarrow t_1 = 399 \text{ jours}$$

## 1.2 Mise au point

1. On a  $d_c = \sqrt{\ell_c^2 + h_c^2}$  et  $S_c = \ell_c h_c$ . La résolution de ce système conduit à :

$$\ell_c^4 - d_c^2 \ell_c^2 + S_c^2 = 0 \Rightarrow \ell_c = \sqrt{\frac{d_c^2 + \sqrt{d_c^4 - 4S_c^2}}{2}}$$

Application numérique :

$$\ell_c = \sqrt{\frac{4,48^2 + \sqrt{4,48^4 - 4 \times 9,63^2}}{2}} \Rightarrow \ell_c = 3,59 \text{ mm}$$

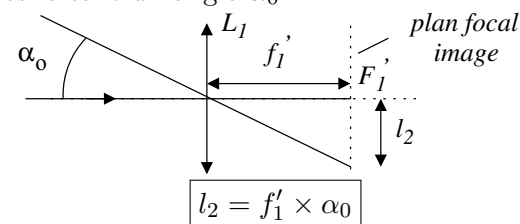
$$h_c = \frac{S_c}{\ell_c} = \frac{9,63}{3,59} \Rightarrow h_c = 2,69 \text{ mm}$$

Et pour la largeur d'un pixel :

$$N \varepsilon_c^2 = S_c \Leftrightarrow \varepsilon_c = \sqrt{\frac{S_c}{N}} = \sqrt{\frac{9,63}{307200}} \Rightarrow \varepsilon_c = 5,60 \mu\text{m}$$

2.  $R_J \gg f'_1$ , on peut donc considérer Jupiter comme étant à l'infini.

3. L'image de Jupiter se forme dans le plan focal image de la lentille  $L_1$ , les rayons extrêmes faisant un angle  $\alpha_0$  :

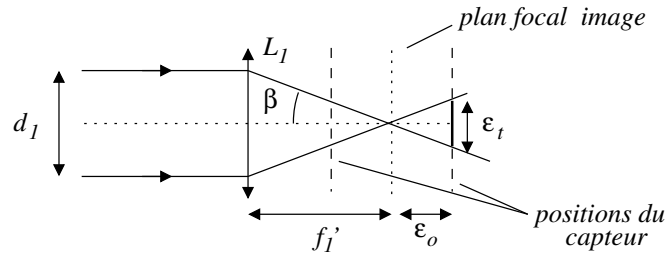


Application numérique :

$$l_2 = 2350 \times 50 \times \frac{1}{3600} \times \frac{\pi}{180} \Rightarrow l_2 = 0,57 \text{ mm}$$

C'est à dire  $\frac{l_2}{\varepsilon_c} = \frac{570}{5,60} \Rightarrow l_2 = 102 \text{ pixels}$ .

4. Si le capteur est placé en amont ou en aval du plan focal image, l'image ponctuelle devient une tache de largeur  $\varepsilon_t$ .



5. À l'aide du schéma, on obtient :

$$\varepsilon_t = 2\beta\varepsilon_0 = 2 \times \frac{d_1}{2f_1'} \times \varepsilon_0 = \frac{d_1}{f_1'} \times \varepsilon_0$$

Pour que la netteté soit préservée, il faut que la taille de la tache soit inférieure à la largeur d'un pixel, ainsi à un point objet sera associé un unique point image (le point ayant ici l'extension du pixel). Ceci impose la condition :

$$\varepsilon_t < \varepsilon_c \Leftrightarrow \frac{d_1}{f_1'} \times \varepsilon_0 < \varepsilon_c \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_0 < \varepsilon_c \times \frac{f_1'}{d_1}}$$

Application numérique :

$$\varepsilon_0 < 5,60 \times 10^{-3} \times \frac{2350}{235} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 < 56 \mu\text{m}}$$

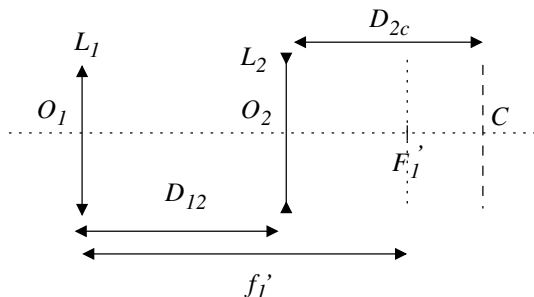
### 1.3 Lentille de Barlow

1. La lentille  $L_1$  conjugue un point à l'infini sur l'axe et  $F_1'$  :

$$L_1 : J_\infty \rightarrow F_1'$$

La lentille  $L_2$  conjugue l'image intermédiaire en  $F_1'$  et un point du capteur sur l'axe noté  $C$  :

$$L_2 : F_1' \rightarrow C$$



L'application de la relation de conjugaison à la seconde lentille conduit à :

$$\frac{1}{O_2C} - \frac{1}{O_2F_1'} = \frac{1}{f_2'} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{D_{2c}} - \frac{1}{f_1' - D_{12}} = \frac{1}{f_2'}}$$

D'autre part, pour une lentille mince, la valeur absolue du grandissement s'écrit :

$$|\gamma| = \frac{O_2C}{O_2F_1'} \Leftrightarrow \boxed{|\gamma| = \frac{D_{2c}}{f_1' - D_{12}}}$$

En combinant les deux relations, on obtient :

$$\frac{1}{D_{2c}} - \frac{|\gamma|}{D_{2c}} = \frac{1}{f_2'} \Leftrightarrow \boxed{f_2' = \frac{D_{2c}}{1 - |\gamma|}}$$

Et  $f_1' - D_{12} = \frac{D_{2c}}{|\gamma|}$ , donc :  $\boxed{D_{12} = f_1' - \frac{D_{2c}}{|\gamma|}}$ .

Application numérique :

$$f_2' = \frac{200}{1 - 3} \Rightarrow \boxed{f_2' = -100 \text{ mm}} \text{ et } D_{12} = 2350 - \frac{200}{3} \Rightarrow \boxed{D_{12} = 2,28 \text{ m}}$$

2. Dans la partie précédente, on a obtenu pour la taille de l'image  $l_2 = f_1'\alpha_0$  ; la taille de l'image étant ici triplée, tout se passe comme si on travaillait avec une lentille de focale triple mais sans le problème de l'encombrement.

### 1.4 Diffraction

Le phénomène de diffraction entraîne une ouverture du faisceau dans un cône de demi-angle au sommet  $\theta \approx \frac{\lambda}{d_1}$  avec  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière.

L'image qui se forme à la distance  $3f_1'$  fait alors une tache sur le capteur de largeur :

$$\varepsilon_d = 3f_1' \times 2\theta \Rightarrow \boxed{\varepsilon_d = 6f_1' \times \frac{\lambda}{d_1}}$$

Application numérique avec  $\lambda = 6 \times 10^2 \text{ nm}$  :

$$\varepsilon_d = 6 \times 2,350 \times \frac{6 \times 10^{-7}}{0,235} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_d \approx 4 \times 10 \mu\text{m}}$$

Comme  $\varepsilon_d > \varepsilon_c$ , **la diffraction limite la netteté du capteur.**

## 2 Dispositif anti-buée

### 2.1 Bilan thermique

- Loi de Fourier :  $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$  et pour un champ de température ne dépendant que de  $r$  :  $j_Q(r) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ . La loi de Fourier s'applique pour la **diffusion thermique** en l'absence de convection ce qui est toujours le cas pour un solide.

Le vecteur courant thermique s'exprime en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$  dans le système international d'unités, on en déduit que  $\lambda$  s'exprime en  $\boxed{\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$  dans le système international d'unités.

- On considère une tranche de verre d'épaisseur  $e$  comprise entre  $r$  et  $r + dr$ . Les flux thermiques à considérer sont : les flux diffusifs en  $r$  et  $r + dr$  et les flux conducto-convectifs sur les anneaux inférieur et supérieur en contact avec l'air. En régime permanent les apports devant compenser les pertes, on obtient :

$$\Phi(r) = \Phi(r + dr) + 2 \times h [T(r) - T_0] 2\pi r dr \Leftrightarrow -\frac{d\Phi(r)}{dr} = 4\pi r h \times \theta(r)$$

Dans le verre, le flux qui traverse la surface cylindrique de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  a pour expression :  $\Phi(r) = -\lambda \frac{d\theta}{dr} \times 2\pi r e$ . En reportant dans le bilan précédent, on obtient :

$$\frac{\lambda e}{2h} \times \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\theta}{dr} \right) = \theta \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta^2 = \frac{\lambda e}{2h}}$$

- Par homogénéité de l'équation différentielle,  $\delta$  est nécessairement une longueur qui représente l'échelle caractéristique de variation de  $\theta$  au sein du matériau. Elle est associée à une compétition entre les effets conductifs au sein du matériau qui tendent à échauffer le verre sous l'effet de l'apport thermique latéral et les effets conducto-convectifs en surface qui tendent à imposer la température  $\theta_0$  au matériau.

Application numérique :

$$\delta = \sqrt{\frac{1,2 \times 0,010}{2 \times 5}} \Rightarrow \boxed{\delta = 35 \text{ mm}}$$

- Avec  $u = r/\delta$  et  $du = dr/\delta$ , l'équation différentielle prend la forme :

$$\frac{1}{u} \frac{d}{du} \left( u \frac{d\tilde{\theta}}{du} \right) = \tilde{\theta}$$

En multipliant par  $u$  et en développant la dérivée, on obtient la forme souhaitée :

$$\boxed{u^2 \frac{d^2 \tilde{\theta}}{du^2} + u \frac{d\tilde{\theta}}{du} - u^2 \tilde{\theta} = 0}$$

- Notons que le problème s'applique au sein du verre pour  $\forall r \in \left[ 0, \frac{d_1}{2} \right]$ , c'est à dire pour la variable  $u$ ,  $\forall u \in \left[ 0, \frac{d_1}{2\delta} \simeq 3,4 \right]$ .

Une température partout supérieure à  $T_0 + 0,5 \text{ K}$  impose :

$$B \times I_0(0) \geq 0,5 \text{ K} \Leftrightarrow \underline{B \geq 0,5 \text{ K}}$$

Une température inférieure à  $T_0 + 5,0 \text{ K}$  dans la zone la plus chaude impose :

$$B \times I_0(3,4) \leq 5,0 \text{ K} \Leftrightarrow \underline{B \leq 0,7 \text{ K}}$$

Le compromis conduit à  $\boxed{B = 0,6 \text{ K}}$ .

### 2.2 Alimentation

- La puissance thermique reçue en périphérie a pour expression :  

$$\Phi_{d_1/2} = \lambda \times 2\pi \times \frac{d_1}{2} \times e \times \left( \frac{d\theta}{dr} \right)_{r=d_1/2} = \lambda \times 2\pi \times \frac{d_1}{2} \times \frac{e}{\delta} \times B \times \left( \frac{dI_0}{du} \right)_{u=3,4}$$

Pour déterminer la pente de la fonction de Bessel, on trace la tangente en  $u = 3,4$  qui passe par les points  $(2, 2; 0)$  et  $(4; 10, 2)$  :

$$\Phi_{d_1/2} = 1,2 \times 2\pi \times \frac{0,235}{2} \times \frac{10}{35} \times 0,6 \times \frac{10,2}{1,8} \Rightarrow \boxed{\Phi_{d_1/2} = 0,86 \text{ W}}$$
- La batterie dispose d'une énergie totale :

$$\mathcal{E} = U \times Q = 12 \text{ V} \times 20 \text{ A} \cdot \text{h} = 240 \text{ Wh}$$

C'est à dire une puissance moyenne consommée :

$$\mathcal{P} = \frac{240}{15} = 16 \text{ W}$$

Le verre reçoit une puissance thermique de  $0,86 \text{ W}$  mais il est indiqué dans l'énoncé que cela ne représente que 10% de la puissance fournie par la résistance électrique qui consomme donc  $8,6 \text{ W}$ . La puissance totale consommée avec le dispositif anti-buée est de l'ordre de  $25 \text{ W}$ , c'est à dire une durée de fonctionnement :

$$\tau = \frac{240}{25} \Rightarrow \boxed{\tau \simeq 9,5 \text{ h}}$$