**Sujet 01. Air 2005. Correction**

## I.A Courants de Foucault, effet de peau

1. Avec $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, on en déduit en ordre de grandeur :
$$\frac{j_d}{j} \approx \frac{\varepsilon_0 \omega E}{\gamma E} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} = \frac{8,85 \times 10^{-12} \times 2\pi \times 50 \times 10^3}{4 \times 10^7} = \underline{7 \times 10^{-14} \ll 1}$$
Dans la suite, on peut donc, dans le métal, négliger le courant de déplacement par rapport au courant de charge.

2. Dans l'ARQS :
$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$
En combinant les équations, on en déduit :
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{B}\right) - \vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0 \gamma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
On en déduit :
$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

3. Les ondes électromagnétiques pénètrent peu dans les métaux et ceci d'autant plus que la fréquence est élevée. L'onde électromagnétique se localise à la surface du métal, on parle d'**effet de peau**.
En notant $L$ la longueur caractéristique et $T$ le temps caractéristique, l'équation s'écrit en ordre de grandeur :
$$\frac{B}{L^2} = \mu_0 \gamma \frac{B}{T} = \mu_0 \gamma f B \quad \Rightarrow \quad \boxed{L^2 = \frac{1}{\mu_0 \gamma f}}$$
Application numérique :
$$L = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \gamma f}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 4 \times 10^7 \times 50 \times 10^3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = 0,6 \text{ mm}}$$

4. En reportant l'expression proposée dans l'équation de diffusion :
$$-\underline{k}^2 = \mu_0 \gamma i \omega \quad \Rightarrow \quad \underline{k}^2 = -\mu_0 \gamma \omega i = \mu_0 \gamma \omega e^{-i\pi/2}$$
En considérant la racine, on en déduit :
$$\underline{k} = \pm\sqrt{\mu_0 \gamma \omega} e^{-i\pi/4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{k} = \pm\left(\frac{1-i}{\delta}\right)}$$
Pour la suite, **on conserve la racine positive** associée à une atténuation pour une propagation dans le sens des $z$ croissants.

5. Pour déterminer le vecteur courant, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'ARQS :
$$\underline{\vec{j}} = \frac{1}{\mu_0} \times \left(-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}\right) = \frac{-i}{\mu_0} \underline{k} \vec{u}_z \wedge B_0 e^{i(\omega t - \underline{k} z)} \vec{u}_x = -\frac{1+i}{\mu_0 \delta} B_0 e^{i(\omega t - \underline{k} z)} \vec{u}_y$$
$$\underline{\vec{j}} = -\frac{B_0\sqrt{2}}{\mu_0 \delta} e^{i\pi/4} e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \vec{u}_y \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{j} = -\frac{B_0\sqrt{2}}{\mu_0 \delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) e^{-z/\delta} \vec{u}_y}$$
L'expression du vecteur courant permet d'évaluer sa divergence :
$$\mathrm{div}\vec{j} = \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0$$
De la loi d'Ohm locale, on en déduit : $\gamma \mathrm{div}\vec{E} = 0$, ce qui entraîne (Maxwell-Gauss) $\boxed{\rho = 0}$.

6. De façon générale, la puissance volumique cédée par le champ aux charges s'écrit $p_v = \vec{j}.\vec{E}$. Compte tenu de la loi d'Ohm locale, on en déduit en moyenne :
$$P_v = \langle p_v \rangle = \left\langle \frac{j^2}{\gamma} \right\rangle = \frac{2B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma} e^{-2z/\delta} \left\langle \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rangle \Rightarrow P_v = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma} e^{-2z/\delta}$$
En intégrant sur l'ensemble du demi-espace sur une section droite $S$, on obtient la puissance totale dissipée dans le matériau :
$$P_{tot} = \frac{B_0^2 S}{\mu_0^2 \delta^2 \gamma} \int_{z=0}^{\infty} e^{-2z/\delta} dz \quad \Rightarrow \quad P_{tot} = \frac{B_0^2 S}{2\mu_0^2 \delta \gamma}$$
Ce qui donne pour la puissance surfacique :
$$P_\sigma = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2 \delta \gamma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_\sigma = \frac{B_0^2}{2\mu_0^2} \sqrt{\frac{\mu_0 \pi f}{\gamma}}}$$

## I.B Coefficients d'inductance

7. Pour la boucle inductive et compte tenu de l'inductance mutuelle :
$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$
Pour le véhicule, en appelant $u_2$ la tension au bornes de la bobine définie en convention récepteur :
$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_i}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$
En reportant dans la première équation :
$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) \frac{di_1}{dt}$$
On en déduit : $\boxed{q = \dfrac{M^2}{L_1 L_2}}$.

### I.C Oscillateur électrique

8. ALI idéal en fonctionnement linéaire $v_+ = v_-$. De part la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{xR'}{xR' + (1-x)R'}\underline{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{u} = x\underline{v}}$$

Les condensateurs sont en série, les inverses des capacités s'ajoutent :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b} \quad \Rightarrow \quad C_{eq} = \frac{C_a C_b}{C_a + C_b}$$

L'interrupteur étant ouvert, les condensateurs et la bobine sont en parallèles, on peut déterminer la résistance équivalente :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{jL(q)\omega \times 1/(jC_{eq}\omega)}{jL(q)\omega + \dfrac{1}{jC_{eq}\omega}} = \frac{jL(q)\omega}{1 - L(q)C_{eq}\omega^2}$$

On appelle $\underline{w}_1$, la tension aux bornes de l'inductance. Grâce à la formule du pont diviseur de tension pour la résistance $R$ et l'impédance équivalente :

$$\frac{\underline{w}_1}{\underline{v}} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{R + \underline{Z}_{eq}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{w}_1}{\underline{v}} = \frac{1}{1 + \dfrac{R(1 - L(q)C_{eq}\omega^2)}{jL(q)\omega}} = \frac{1}{1 + j\left(RC_{eq}\omega - \dfrac{R}{L(q)\omega}\right)}$$

La formule du pont diviseur de tension appliquée au niveau des condensateurs s'écrit :

$$\underline{w} = \frac{\dfrac{1}{jC_b\omega}}{\dfrac{1}{jC_a\omega} + \dfrac{1}{jC_b\omega}}\underline{w}_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{w} = \frac{C_a}{C_a + C_b}\underline{w}_1$$

Avec $\underline{u} = x\underline{v}$ et $\underline{w} = \dfrac{C_a}{C_a + C_b}\underline{w}_1$, on en déduit :

$$\frac{\underline{w}}{\underline{u}} = \frac{\dfrac{C_a}{C_a + C_b} \times \dfrac{1}{x}}{1 + j\left[RC_{eq}\omega - R/(L(q)\omega)\right]}$$

Avec par identification : $Q/\Omega = RC_{eq}$ et $\Omega Q = R/L(q)$, c'est à dire :

$$\boxed{\Omega^2 = \frac{1}{L(q)C_{eq}}} \quad ; \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C_{eq}}{L(q)}}} \quad ; \quad \boxed{C_{eq} = \frac{C_a C_b}{C_a + C_b}} \quad \text{et} \quad \boxed{H_0 = \frac{1}{x}\frac{C_a}{C_a + C_b}}$$

9. Partons de la fonction de transfert :

$$\underline{w}\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega}\right)\right] = H_0\underline{u} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\times\, j\omega} \quad j\omega\underline{w} + (j\omega)^2\frac{Q}{\Omega}\underline{w} + Q\Omega\underline{w} = H_0 j\omega\underline{u}$$

Expression que l'on peut réécrire dans l'espace temporel :

$$\boxed{\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{\Omega}{Q}\frac{d\omega}{dt} + \Omega^2\omega = \frac{\Omega H_0}{Q}\frac{du}{dt}}$$

C'est à dire $\boxed{a = \dfrac{\Omega}{Q}}$, $\boxed{b = \Omega^2}$ et $\boxed{c = \dfrac{\Omega H_0}{Q}}$.

10. On ferme l'interrupteur $K$, on a alors $w = u$. Le courant étant nul à l'entrée non inverseuse, fermer l'interrupteur ne modifie pas les équations précédemment obtenues.

L'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2w}{dt^2} + (a - c)\frac{d\omega}{dt} + bw = 0$$

L'oscillation sinusoïdale nécessite $a = c$, c'est à dire :

$$\frac{\Omega}{Q} = \frac{\Omega}{Q} \times \frac{1}{x_0}\left(\frac{C_a}{C_a + C_b}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = \frac{C_a}{C_a + C_b}}$$

L'oscillation se fait à la pulsation $\Omega$ telle que :

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{L(q)C_{eq}}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_{eq}(1-q)}} \quad \Rightarrow \quad \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_{eq}}}(1-q)^{-1/2}$$

On en déduit :

$$\boxed{\Omega \simeq \omega_0\left(1 + \frac{q}{2}\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_{eq}}}}$$

11. L'apparition des oscillations nécessite un système légèrement instable, c'est à dire $a < c$ :

$$\frac{\Omega}{Q} < \frac{\Omega}{Q} \times \frac{1}{x}\left(\frac{C_a}{C_a + C_b}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x < x_0}$$

12. L'amplitude des oscillations est limitée par la *saturation en tension de l'ALI.*

### I.D Détection électronique de la variation de fréquence

L'objectif de ce montage est de convertir la variation de fréquence en une variation de tension, c'est un **convertisseur fréquence-tension**.

13. Le montage à amplificateur opérationnel placé entre $D$ et $E$ est un **montage suiveur**. L'objectif est de récupérer le signal $w$ sans affecter l'oscillateur électrique.

14. Le montage entre $E$ et $F$ est un montage intégrateur. On applique la loi des nœuds à l'entrée inverseuse :
$$\frac{\underline{V}_E - \underline{V}_-}{R_1} = \frac{\underline{V}_- - \underline{V}_F}{1/(jC_1\omega(q))}$$
Pour un ALI idéal fonctionnant en régime linéaire : $\underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0$, ce ce qui donne :
$$\frac{\underline{V}_E}{R_1} = -\underline{V}_F jC_1\omega(q)$$
c'est à dire pour les amplitudes réelles :
$$\boxed{E_F = \frac{E_0}{R_1C_1\omega(q)} = \frac{\omega_1}{\omega(q)}E_0}$$
15. Le montage entre $E$ et $F'$ est un montage dérivateur. On applique la loi des nœuds à l'entrée inverseuse :
$$\frac{\underline{V}_E}{1/jC_1\omega(q)} = \frac{-\underline{V}_{F'}}{R_1}$$
C'est à dire pour les amplitudes réelles :
$$\boxed{E_{F'} = \frac{\omega(q)}{\omega_1}E_0}$$
16. La diode sert à redresser le signal, le condensateur assure que la tension en $G$ se maintient au niveau de l'amplitude du signal en $F$ à condition que la constante de temps $R_2C_2$ associée à la décharge du condensateur soit très grande vis à vis de la période du signal $T = 2\pi/\omega(q)$.
17. Avec une diode en inverse, la diode sera passante pour un potentiel $V_{F'} < V_{G'}$, dans les mêmes conditions que précédemment on obtient $\boxed{V_{G'} = -E_{F'}}$.
18. Le dernier montage est un montage sommateur inverseur, en appliquant la loi des nœuds à l'entrée inverseuse, on obtient :
$$\frac{V_G}{R_2} + \frac{V_{G'}}{R_2} + \frac{V_0}{yr} - \frac{V_0}{(1-y)r} = -\frac{V_H}{R_3} \quad \Rightarrow \quad V_H = -R_3\left[\frac{E_F}{R_2} - \frac{E_{F'}}{R_2} + \frac{V_0(1-2y)}{y(1-y)r}\right]$$
Avec $E_F = \dfrac{E_0\omega_1}{\omega(q)}$ et $E_{F'} = \dfrac{E_0\omega(q)}{\omega_1}$, on obtient (à l'ordre 1 en $q$) :
$$V_H = -R_3\left[\frac{E_0}{R_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0(1+q/2)} - \frac{\omega_0(1+q/2)}{\omega_1}\right) + \frac{V_0(1-2y)}{y(1-y)r}\right]$$
$$\Rightarrow \quad V_H = -R_3\left[\frac{E_0}{R_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}(1-q/2) - \frac{\omega_0(1+q/2)}{\omega_1}\right) + \frac{V_0(1-2y)}{y(1-y)r}\right]$$
On en déduit :
$$\boxed{V_H = -\frac{R_3E_0}{R_2}\left[\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right] - \frac{R_3V_0(1-2y)}{y(1-y)r} + \frac{R_3E_0}{2R_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) \times q}$$
19. La relation entre la tension de sortie et le paramètre $q$ est de la forme : $V_H = a + b \times q$. Le réglage du paramètre $y$ permet de supprimer la constante est d'obtenir une amplitude de tension proportionnelle à la fluctuation de fréquence :
$$\boxed{V_H = \frac{R_3E_0}{2R_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) \times q}$$

## Sujet 02. Mines 2007. Correction

1. On applique le théorème du moment cinétique au point $O$ pour le mobile $M$ soumis à une force centrale :
$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}}_{\text{vecteurs parallèles}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_o = \overrightarrow{cste}$$
Le mobile est soumis à une unique force conservative, l'**énergie mécanique du mobile se conserve**.
2. On applique la relation fondamentale de la dynamique au satellite pour un mouvement circulaire de rayon $r = R_T + h$ :
$$M_S\vec{a} = -\frac{GM_TM_S}{r^2}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad -\frac{v^2}{r} = -\frac{GM_T}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2 = \frac{GM_T}{R_T+h}}$$
Pour un mouvement circulaire uniforme : $v = \dfrac{2\pi(R_T+h)}{T}$, on en déduit la troisième loi de Kepler :
$$\frac{(R_T+h)^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} \text{ soit } \boxed{h = \left(\frac{GM_TT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T}$$
3. On pose $r = R_T + h$ :
$$\boxed{2E_c + E_p = 2 \times \frac{1}{2}M_sv^2 - \frac{GM_TM_s}{r} = M_s\frac{GM_T}{r} - \frac{GM_TM_s}{r} = 0}$$
4. On appelle $\beta$ l'angle entre les directions $OA$ et $OQ$ ; dans le triangle $OAQ$, on a :
$$\cos(\beta) = \frac{R_T}{R_T+h} \quad \text{soit} \quad \beta = \arccos\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)$$
Le satellite est visible de $A$ à $B$, c'est à dire pour un angle correspondant à $2\beta$ ; comme le mouvement circulaire s'effectue à vitesse constante, une simple proportion permet d'affirmer :

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2\beta}{2\pi} \quad \text{donc } \tau = \frac{T}{\pi} \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)$$

Et finalement en utilisant la troisième loi de Kepler :

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi^2 (R_T + h)^3}{GM_T}\right)^{1/2} \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right) = 921 \text{ s}}$$

5. $\boxed{T/\tau \simeq 6,6}$, il faut donc disposer d'au moins **7 satellites** pour que chaque point du sol puisse « voir » un satellite à tout instant.

6. On applique la troisième loi de Kepler pour un satellite qui effectue dans le plan équatorial une révolution en une durée égale à la période de révolution de la Terre sur elle-même c'est à dire 86164 s pour obtenir :

$$\boxed{T_{geo} = 86164 \text{ s}} \text{ et } \boxed{h = 35,8 \times 10^3 \text{ km}}$$

Le satellite géostationnaire reste toujours « au-dessus » de la zone souhaitée, il n'y a donc pas de problème de visibilité ; le satellite géostationnaire étant envoyé à une altitude beaucoup plus importante, le coût est nettement augmenté ; la puissance d'émission des ondes doit être ajustée en conséquence, il faut aussi tenir compte du délai pour l'onde électromagnétique qui doit parcourir l'aller-retour, soit une distance de l'ordre de 70 000 km à la vitesse de la lumière, c'est à dire un retard de quelques dixièmes de seconde. Enfin le satellite géostationnaire n'est pas adapté pour l'observation des pôles.

7. $\alpha$ est le rapport d'une force sur une énergie $(M_s v^2)$, une énergie étant le produit d'une force par une longueur, on en déduit :

$$\boxed{[\alpha] = L^{-1} \quad \text{l'inverse d'une longueur}}$$

Partons du théorème de l'énergie mécanique appliqué au satellite dans le référentiel géocentrique.

$$\frac{dE_M}{dt} = \frac{d(E_c + E_p)}{dt} = \vec{f}_a.\vec{v} \quad \text{donc} \quad -\frac{dE_c}{dt} = -\alpha M_s v^3$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé le théorème du viriel, $E_c + E_p = -E_c$.
La dernière expression se réécrit, sachant que $E_c = \frac{1}{2} M_s v^2$ :

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\alpha v^3 \quad \text{donc} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{GM_T}{R_T + h}\right) = 2\alpha \left(\frac{GM_T}{R_T + h}\right)^{3/2}$$

Et finalement : $\boxed{\frac{dh}{dt} = -2\alpha\,(GM_T)^{1/2}\,(R_T + h)^{1/2}}$

8. 1 m à chaque révolution signifie que $\frac{dh}{dt} \approx \frac{-1}{T} \approx \frac{-1}{6078}$, on peut alors estimer $\alpha$ :

$$\boxed{\alpha = \frac{-1}{2}\frac{dh}{dt}\frac{1}{(GM_T)^{1/2}\,(R_T + h)^{1/2}} = 1,53 \times 10^{-15} \text{ m}^{-1}}$$

L'altitude diminue de 1 m par révolution c'est à dire toutes les 6078 s, en une durée de 10 ans, la baisse est de :

$$\boxed{\Delta h = \frac{1 \times 10 \times 3,15 \times 10^7}{6078} \simeq 52 \text{ km}}$$

Pour le calcul exact, on considère l'équation différentielle :

$$\frac{dh}{(R_T + h)^{1/2}} = -2\alpha\,(GM_T)^{1/2}\,dt \quad \text{donc} \quad \left[(R_T + h)^{1/2}\right]_{h_0}^{h} = -\alpha\,(GM_T)^{1/2}\,t$$

On en déduit :

$$h(t) = \left((R_T + h_0)^{1/2} - \alpha\,(GM_T)^{1/2}\,t\right)^2 - R_T = 748,4 \text{ km}$$

Soit une baisse d'altitude de $800 - 748,4 \simeq \boxed{51,6 \text{ km}}$ et un résultat très voisin du calcul approché.

En présence de frottements c'est l'énergie mécanique qui diminue, l'énergie mécanique étant la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, **l'énergie cinétique peut bien augmenter à condition que l'énergie potentielle diminue suffisamment** (Cf. également $v^2 = GM_T/(R_T + h)$ si $h$ diminue $v$ augmente).