

Physique. Sujet 1. X PSI 2004

Étude d'un congélateur

A : évaluation simple de l'efficacité

1. Appelons h , l et p les dimensions intérieures du dispositif avec pour le volume utile $V_{\text{utile}} = h \times l \times p$.

$$V_{\text{utile}} = (H - 2e) \times (L - 2e) \times (P - 2e) \simeq HLP - 2e(LP + HL + HP)$$

$$e = \frac{HLP - V_{\text{utile}}}{2(LP + HL + HP)}$$

e étant très petite devant les autres dimensions, on n'a gardé que les termes d'ordre 1 en e .

Application numérique : $e = 6,2 \text{ cm}$.

2. D'après la loi phénoménologique de Fourier : λ s'exprime en $\frac{\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}}$ dans le système international d'unités.

Un bon isolant thermique, laine de roche, polystyrène, a une conductivité thermique de l'ordre de $0,04 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

3. Par définition la résistance thermique est le rapport de la différence de température sur le flux thermique, cette résistance s'exprime simplement dans le cas d'une géométrie unidimensionnelle parallélépipédique :

$$R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{e}{\lambda S} = \frac{e}{\lambda \times 2(H \times L + H \times P + L \times P)}$$

C'est à dire pour le flux thermique :

$$\Phi = \frac{\Delta T \times \lambda \times 2(H \times L + H \times P + L \times P)}{e} \quad \boxed{\Phi = 94 \text{ W}}$$

4. Le système consomme $0,70 \text{ kWh/jour}$ ce qui donne, ramené en watt :

$$P_{elec} = \frac{0,70 \times 10^3 \times 1}{24} \Rightarrow \boxed{P_{elec} = 29 \text{ W}}$$

5. L'efficacité est le rapport de la puissance utile (la puissance prélevée à la source froide, l'intérieur du système) sur la puissance électrique consommée. En régime stationnaire, la puissance prélevée à la source froide est égale au flux thermique entrant précédemment calculé :

$$\eta = \frac{\Phi}{P} = \frac{94}{29} \Rightarrow \boxed{\eta = 3,2}$$

B : Modélisation du cycle de la machine frigorifique

6. En régime stationnaire, on considère un fluide qui traverse le domaine associé à une des étapes du cycle.

On raisonne sur une masse unité qui traverse le domaine. Le régime étant stationnaire, la variation d'énergie interne se limite à la différence des énergies internes des unités de masse en entrée et en sortie. On décompose les travaux des forces en deux parties, les travaux des forces de pression en amont et en aval et les autres travaux. On note 1 les grandeurs en entrée et 2 les grandeurs en sortie :

$$\Delta u_{int} = w + q = w' - P_2 u_2 + P_1 u_1 + q \Rightarrow u_{int,2} + P_2 u_2 - (u_{int,1} + P_1 u_1) = w' + q$$

On en déduit : $\boxed{\Delta h = w' + q \text{ avec } w = w' + P_1 u_1 - P_2 u_2}$

7. w'_{12} est le **travail utile** autre que les forces de pression.

Dans le cas d'une détente de Joule-Kelvin, évolution adiabatique et absence d'apports mécaniques, $\Delta h = 0$, on retrouve qu'une **détente de Joule-Kelvin est isenthalpique**.

8. Sur un cycle, les termes $P_i u_i$ vont se simplifier deux à deux, l'entrée d'une étape représente la sortie de la précédente, en conséquence $\boxed{w'_{cycle} = w_{cycle}}$.

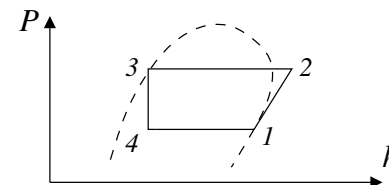
9. Le tuyau est indéformable $w'_{34} = 0$, absence de transfert thermique $q_{34} = 0$, le premier principe industriel implique $\boxed{\Delta h = 0}$.

10. Pour un mélange liquide vapeur d'un corps pur, si la pression est fixée, la température l'est aussi, en conséquence **les isobares sont également des isothermes**.

11. Le point 1 de température $T = -30^\circ\text{C}$ est situé sur la courbe de saturation. La compression étant adiabatique et réversible, la transformation 2 suit une isentropique jusqu'à la pression $P = 8 \text{ bars} = 8 \times 10^5 \text{ Pa} = 0,8 \text{ MPa}$.

Le fluide se refroidit ensuite à pression constante dans l'échangeur jusqu'à la courbe de saturation.

La détente est isenthalpique et correspond donc à un segment de droite verticale, jusqu'à la température de l'évaporateur $T = -30^\circ\text{C}$.



Caractéristiques des différents points :

	P (MPa)	h (kJ/kg)	θ (°C)	s (kJ.kg ⁻¹ .K ⁻¹)
point 1	0,084	375	-30	1,75
point 2	0,8	425	42	1,75
point 3	0,8	240	30	1,15
point 4	0,084	240	-30	1,19

12. Très généralement la variation d'entropie s'écrit $\Delta s = s^e + s^c$, pour une transformation adiabatique $s^e = 0$, en conséquence $\Delta s = s^c > 0$. La transformation est marquée par une augmentation de l'entropie et donc un point légèrement plus à droite sur le graphique, c'est à dire une **température plus élevée**.

13. Lors de la transformation isobare de l'unité de masse du liquide saturé à la vapeur saturée, on a :

$$\Delta h = l \quad \text{et} \quad \Delta s = \frac{\Delta h}{T} = \frac{l}{T}$$

Il suffit donc de lire la variation d'enthalpie massique et d'entropie massique lors de la transformation de la totalité de l'unité de masse du liquide.

Pour $P = 3 \text{ bars} = 0,3 \text{ MPa}$:

$$l = \Delta h = 400 - 200 = \underline{200 \text{ kJ.kg}^{-1}} \quad \text{et} \quad l = T\Delta s = 273 \times (1,73 - 1) \simeq \underline{200 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

14. **L'enthalpie de changement d'état est nulle au point critique**, point pour lequel on ne distingue plus liquide et vapeur.

15. $\Delta h = (1 - x) \times l$. En effet si x est le titre en vapeur, il y a $(1 - x)$ kilogramme de liquide à évaporé.

En appelant L le point du liquide saturé, M le point du mélange et V la vapeur saturée, on a : $xLV = LM$.

16. Point 1 : vapeur saturée $x_1 = 1$; Point 3 : liquide saturé $x_3 = 0$; Point 4 : $x_4 = 0,35$; $y = 1 - x$.

17. Pour l'échange isobare avec la source chaude :

$$q_c = \Delta h_{23} = h_3 - h_2 = -185 \text{ kJ/kg}$$

Pour l'échange isobare avec la source froide :

$$q_f = \Delta h_{41} = h_1 - h_4 = 135 \text{ kJ/kg}$$

18. Lors de la compression adiabatique $w'_{12} = \Delta h_{12} = 50 \text{ kJ/kg}$

19. L'efficacité de la machine est le rapport de l'énergie utile (ce que l'on prend à la source froide pour la refroidir) sur le coût (le travail électrique du compresseur.

$$\eta = \frac{q_f}{w'_{12}} = \frac{135}{50} = 2,7$$

20. L'écart entre les deux valeurs d'efficacité est de l'ordre de 15%. Il faut cependant noter que :

→ pour le premier modèle : la conductivité thermique n'est donnée qu'avec un seul chiffre significatif, le calcul entre le volume utile et le volume global est grossier, le rendement du compresseur n'a pas été pris en compte,

→ pour la seconde partie : les transformations ont été idéalisées, les positions des points sur le diagramme ont été pris à quelques % près.

En conséquence la cohérence des deux résultats est satisfaisante.

Physique. Sujet 2. E3A PSI 2012

Diffusion thermique dans un fil électrique

1. Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \times \overrightarrow{\text{grad}T}$ avec λ la conductivité thermique du matériau.

Pour un vecteur courant uniforme sur la section droite du fil :

$$\Phi_{th} = j_{th} \times S$$

2. En régime permanent, les apports doivent compenser les pertes. En l'absence d'apports en volume et de pertes latérales, le flux thermique est nécessairement indépendant de x :

$$\frac{d\Phi_{th}}{dx} = 0 \Rightarrow -\lambda \times \frac{dT}{dx} \times S = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = 0$$

La température est une fonction affine de l'abscisse le long du fil. Compte-tenu des conditions aux limites, on en déduit :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$$

3. Le flux thermique étant indépendant de l'abscisse, on en déduit :

$$\Phi_2 = \Phi_{th}(x) = -\lambda \times \frac{dT}{dx} \times S \Rightarrow \Phi_2 = \lambda \times \frac{T_1 - T_2}{L} \times S$$

4. Un élément de longueur dx et de section S a une résistance élémentaire

$$dR = \frac{\rho dx}{S}$$

Cet élément dissipe, par effet Joule, une puissance $\delta P = dR \times I^2 = \frac{\rho dx}{S} I^2$, c'est à dire pour la puissance thermique volumique :

$$P_{th,V} = \frac{\delta P}{S dx} \Rightarrow P_{th,V} = \frac{\rho I^2}{S^2}$$

5. On considère un élément situé entre x et $x + dx$ et de section S pendant une durée dt . En régime permanent, les apports (flux entrant en x et puissance dissipée par effet Joule) doivent compenser les pertes (flux en $x + dx$) :

$$\Phi_{th}(x)dt + \frac{\rho I^2}{S^2} \times S dx dt = \Phi_{th}(x + dx)dt$$

$$\Rightarrow -\lambda \frac{dT}{dx}(x) \times S + \frac{\rho I^2}{S} dx = -\lambda \frac{dT}{dx}(x + dx) \times S \Leftrightarrow \frac{dT^2}{dx^2} = -\frac{\rho I^2}{\lambda S^2}$$

L'équation s'intègre selon : $T(x) = -\frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}x^2 + Ax + B$. Avec $T(x = 0) = T_1$ et $T(x = L) = T_2$, on en déduit :

$$T(x) = -\frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}x^2 - \left[\frac{T_1 - T_2}{L} - \frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}L \right]x + T_1$$

C'est à dire, pour le vecteur densité de courant thermique :

$$j_{th}(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Rightarrow j_{th}(x) = \frac{\rho I^2}{S^2} \left(x - \frac{L}{2} \right) + \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$$

6. Avec $\Phi_{th}(x) = j_{th}(x)S$, on obtient :

$$\Phi_{th}(x) = \lambda \times \frac{T_1 - T_2}{L}S - \frac{\rho I^2}{S^2}S \left(x - \frac{L}{2} \right) = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2) + \frac{\rho L}{S} I^2 \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\Phi_{th}(x) = G(T_1 - T_2) + RI^2 \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right)$$

7. On obtient pour le flux en $x = L$:

$$\Phi'_2 = \Phi(x = L) \Rightarrow \Phi'_2 = G(T_1 - T_2) + \frac{RI^2}{2}$$

Le premier terme représente le flux thermique associé à la différence de température imposée aux limites du système, le second terme représente la moitié de la puissance dissipée par effet Joule au sein du fil, l'autre moitié quittant le fil par l'autre extrémité.

8. On considère un élément situé entre x et $x + dx$ et de section S pendant une durée dt . En régime permanent, les apports (flux entrant en x et puissance dissipée par effet Joule) doivent compenser les pertes (flux en $x + dx$ et flux latéral) :

$$\Phi_{th}(x)dt + dR(x)I^2dt = \Phi_{th}(x + dx)dt + h[T(x) - T_a]p dx dt$$

$$\Leftrightarrow -\lambda \frac{dT}{dx}(x)Sdt + \frac{\rho(x)}{S} dx I^2 dt = -\lambda \frac{dT}{dx}(x + dx)Sdt + h[T(x) - T_a]p dx dt$$

$$\Leftrightarrow \lambda \frac{d^2T}{dx^2} S dt dx = h[T(x) - T_a]p dx dt - \frac{\rho(x)}{S} I^2 dx dt$$

Avec $\theta(x) = T(x) - T_a$, on obtient :

$$\lambda S \frac{d^2\theta}{dx^2} = hp\theta(x) - \frac{\rho_a [1 + \beta\theta(x)]}{S} I^2$$

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \frac{1}{\lambda S} \left[\frac{\rho_a \beta I^2}{S} - ph \right] \theta(x) = -\frac{\rho_a I^2}{\lambda S^2}$$

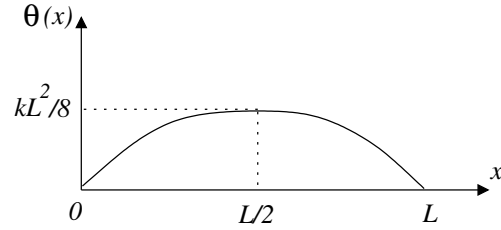
$$\text{avec } m^2 = \frac{1}{\lambda S} \left[\frac{\rho_a \beta I^2}{S} - ph \right] \text{ et } k = \frac{\rho_a I^2}{\lambda S^2}$$

9. $m^2 = 0$ impose : $I_0^2 = \frac{phS}{\rho_a\beta}$. L'équation différentielle s'intègre alors selon :

$$\theta(x) = -\frac{kx^2}{2} + Ax + B$$

Avec $\theta(x=0) = \theta(x=L) = 0$, on en déduit :

$$\theta(x) = -\frac{kx^2}{2} + \frac{kL}{2}x$$



L'échauffement est maximal au milieu du fil.

10. À la température $T(x) = T_a$, $\rho(x) = \rho_a$, $R_a = \frac{\rho_a L}{S}$.

Dans le cas général, on considère la résistance élémentaire et on intègre ensuite sur l'ensemble du fil car les résistances sont en série :

$$dR = \frac{\rho_a [1 + \beta\theta(x)]}{S} dx = \frac{\rho_a}{S} \left(1 + \frac{\beta k}{2} [Lx - x^2] \right) dx$$

Ce qui donne par intégration :

$$R = \int_0^L \frac{\rho_a dx}{S} + \int_0^L \frac{\rho_a \beta k}{2S} [Lx - x^2] dx = R_a + \frac{\rho_a \beta k}{2S} \left[L \times \frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{3} \right]$$

$$\Leftrightarrow R = R_a + \frac{\rho_a \beta k L^3}{12S}$$

Ce qui donne pour la variation relative :

$$\delta = \frac{R - R_a}{R_a} = \frac{\beta k L^2}{12} = \frac{\beta L^2}{12} \times \frac{\rho_a I_0^2}{\lambda S^2} = \frac{\beta L^2}{12} \times \frac{\rho_a}{\lambda S^2} \times \frac{phS}{\rho_a \beta}$$

C'est à dire : $\delta = \frac{phL^2}{12\lambda S}$.

Diffusion dans un flux visqueux

1. $\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_x(z, t)}{\partial x} = 0$. L'écoulement est bien incompressible.

2. On considère comme système \mathcal{S} fermé le fluide contenu dans la surface de contrôle Σ , parallélépipède de surface dS et contenu entre z et $z + dz$ ainsi que le fluide qui s'apprête à entrer dans la surface de contrôle pendant dt . Le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$d\vec{p} = \delta\vec{F} \times dt$$

Commençons par exprimer le terme de gauche :

$$d\vec{p} = \vec{p}_S(t + dt) - \vec{p}_S(t) = \delta\vec{p}_s + \vec{p}_\Sigma(t + dt) - \delta\vec{p}_e - \vec{p}_\Sigma(t)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} -\delta\vec{p}_s - \delta\vec{p}_e &= [\delta m_s u_x(z, t + dt) - \delta m_e u_x(z, t)] \vec{u}_x \\ &= [\rho u_x(z, t + dt) dS' dt u_x(z, t + dt) - \rho u_x(z, t) dS' dt u_x(z, t)] \vec{u}_x \\ &= \rho dS' dt \times \frac{\partial u_x^2}{\partial t} \times dt \text{ (ordre 2 en } dt, \text{ donc négligé)} \\ -\vec{p}_\Sigma(t + dt) - \vec{p}_\Sigma(t) &= \rho dS dz [u_x(z, t + dt) - u_x(z, t)] \vec{u}_x \\ \vec{p}_\Sigma(t + dt) - \vec{p}_\Sigma(t) &= \rho dS dz \frac{\partial u_x}{\partial t} dt \vec{u}_x \end{aligned}$$

Pour le terme de droite :

$$\begin{aligned} \delta\vec{F} &= \delta\vec{F}(z + dz) + \delta\vec{F}(z) = \eta dS \left[\frac{\partial u_x}{\partial z}(z + dz, t) - \frac{\partial u_x}{\partial z}(z, t) \right] \vec{u}_x \\ &\Rightarrow \delta\vec{F} = \eta dS \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} dz \vec{u}_z \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Cette équation aux dérivées partielles est une équation de diffusion. Les couches de fluide frottant les unes sur les autres se mettent en mouvement progressivement sous l'effet du mouvement de la plaque.

La dimension de ν est le rapport d'une longueur au carré par un temps, et s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ dans le système international d'unités.

3. $\sqrt{\nu t}$ est homogène à une **longueur**, cette grandeur représente la distance caractéristique sur laquelle le phénomène de diffusion se fait sentir en une durée t .

4. Conditions aux limites :

— la condition 1 est la condition initiale qui indique que le fluide est au repos avant le début de l'expérience $t = 0$;

- la condition 2 est une condition aux limites, condition d'adhérence qui impose au fluide en contact avec la plaque d'avoir la vitesse de la plaque ;
- le condition 3 est une condition aux limites qui indique qu'à très grande distance le fluide est immobile (il faudrait un temps infini à la perturbation pour agir à l'infini).

5. Exprimons les dérivées à l'aide de la variable ξ , $\forall t > 0$, $\forall z > 0$:

$$\rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{du_x}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{du_x}{d\xi} \times \left(-\frac{1}{2} \frac{zt^{-3/2}}{\sqrt{\nu}} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{du_x}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{du_x}{d\xi} \times \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{d^2 u_x}{d\xi^2} \times \frac{1}{\nu t}$$

On repart alors de l'équation précédemment obtenue :

$$0 = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - \frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{d^2 u_x}{d\xi^2} \times \frac{1}{\nu t} + \frac{du_x}{d\xi} \times \left(\frac{zt^{-3/2}}{2\sqrt{\nu}} \right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{t} \left[\frac{d^2 u_x}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{du_x}{d\xi} \right] \Leftrightarrow \boxed{\forall \xi > 0, \quad \frac{d^2 u_x}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{du_x}{d\xi} = 0}$$

6. L'équation étant linéaire, une somme de solutions est solution. On note déjà que toute fonction constante est solution.

Vérifions maintenant que l'application $f : \xi \rightarrow \text{erf}(\xi/2)$ est solution de $\{E'\}$:

$$- \frac{df}{d\xi} = \frac{1}{2} \times \text{erf}'(\xi/2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right);$$

$$- \frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \left(-\frac{2\xi}{4}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) = \frac{-\xi}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right).$$

En conséquence :

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{df}{d\xi} = -\frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) + \frac{\xi}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) = 0$$

L'application $f : \xi \rightarrow \text{erf}(\xi/2)$ est bien également solution de l'équation différentielle, on peut donc retenir : $u_x(\xi) = A \times \text{erf}\left(\frac{\xi}{2}\right) + B$ comme solution.

La condition (2) impose : $u_x(\xi = 0) = U = A \times \text{erf}(0) + B \Rightarrow B = U$.

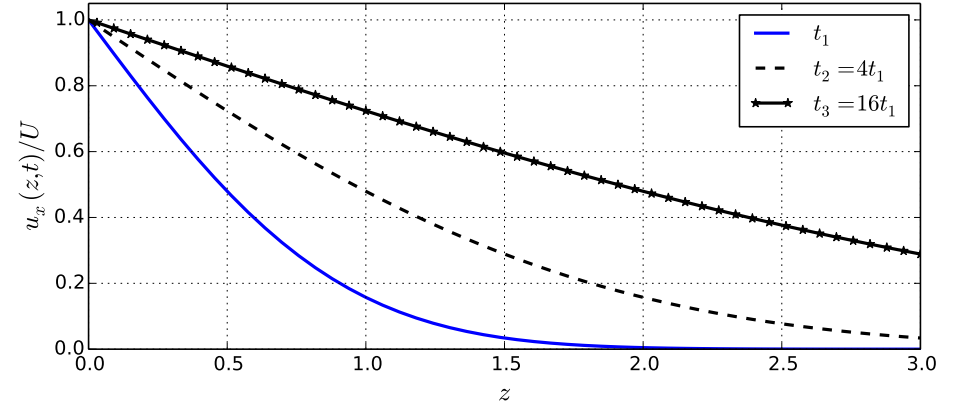
La condition (3) impose : $\lim_{\xi \rightarrow \infty} u_x(\xi) = 0 = A + B \Rightarrow A = -U$.

On en déduit : $\forall t > 0$, $\forall x > 0$:

$$\boxed{u_x(z, t) = U \left[1 - \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right] = U \times \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-s^2} ds \right]}$$

7. Pour tracer la fonction à un instant t_1 , partant de la courbe de l'énoncé entre $[0, \infty[$, on applique une symétrie par rapport à l'axe des abscisses et

on ajoute ensuite 1.

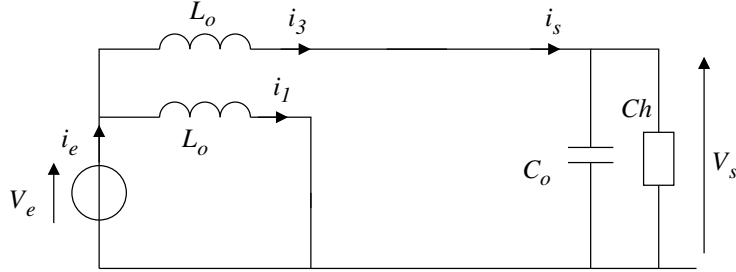


Aux temps ultérieurs, pour un instant $t_2 = 4t_1$, le paramètre $\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}$ est invariant pour une distance deux fois supérieure.

La vitesse U s'installe progressivement par diffusion au sein du fluide.

Physique. Sujet 3. Double hacheur

1. Le transistor T_1 étant passant, la tension D_2 aux bornes de la diode est négative et la diode est bloquante, le courant i_1 s'écoule dans le transistor. Le transistor T_3 étant bloquant, et le courant i_3 ne s'annulant pas, la diode D_4 est nécessairement passante.

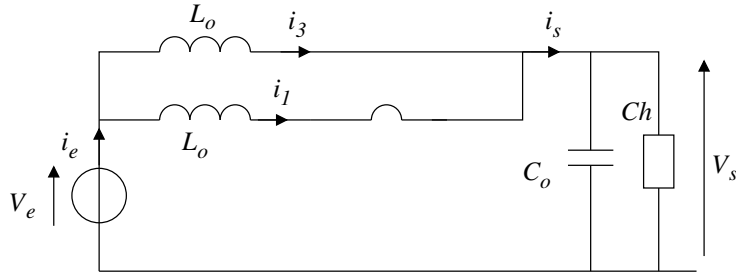


On en déduit alors par application de la loi des mailles :

$$V_e = L_0 \frac{di_1}{dt} \Rightarrow \boxed{i_1(t) = \frac{V_e}{L_0} \times t + I_m}$$

Sur les phases suivantes, l'intensité sera décroissante, on a donc nécessairement $i_1(0) = I_m$ et $i_1(\alpha T) = I_M$.

2. Sur cette phase, le schéma équivalent prend la forme :

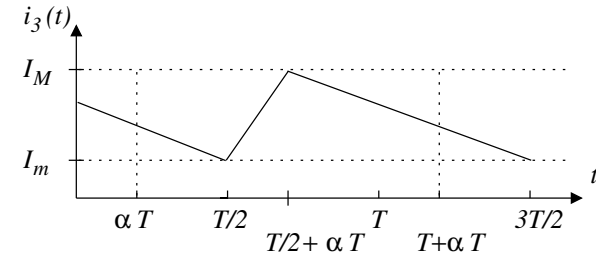
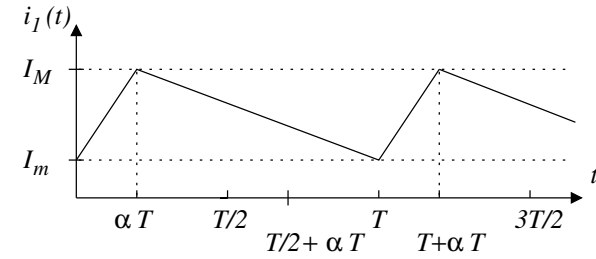


On en déduit alors par application de la loi des mailles :

$$V_e - V_s = L_0 \frac{di_1}{dt} \Rightarrow \boxed{i_1(t) = \frac{V_e - V_s}{L_0} \times (t - \alpha T) + I_M}$$

3. Du fait de la commande des transistors, l'intensité i_3 est décalée de $T/2$ par rapport à i_1 .

Ce qui donne pour les chronogrammes :



La première relation appliquée en $t = \alpha T^-$ conduit à : $I_M = \frac{V_e}{L_0} \alpha T + I_m$.

La seconde relation appliquée en $t = T^-$ conduit à :

$$I_m = \frac{V_e - V_s}{L_0} \times (1 - \alpha)T + I_M$$

En comparant les deux relations, on en déduit : $V_e = V_s(1 - \alpha)$.

L'ondulation de courant a donc pour expression :

$$\Delta i_1 = \Delta i_3 = I_M - I_m = \frac{V_e}{L_0} \alpha T \Rightarrow \boxed{\Delta i_1 = \Delta i_3 = \frac{V_s(1 - \alpha)\alpha T}{L_0}}$$

4. D'après la loi des nœuds, $i_e = i_1 + i_3$, c'est à dire pour $t \in [0, \alpha T[$:
- $$\frac{di_e}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_3}{dt} = \frac{V_e}{L_0} + \frac{V_e - V_s}{L_0} = \frac{2V_e - V_s}{L_0} = \frac{2V_s(1 - \alpha) - V_s}{L_0} = \frac{V_s(1 - 2\alpha)}{L_0}$$

L'évolution étant affine :

$$\frac{di_e}{dt} = \frac{\Delta i_e}{\alpha T} = \frac{V_s(1 - 2\alpha)}{L_0} \Rightarrow \boxed{\Delta i_e = \frac{\alpha(1 - 2\alpha)TV_s}{L_0}}$$

5. On détermine le rapport :

$$\boxed{\frac{\Delta i_e}{\Delta i_1} = \frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha} = 0,17}$$

On comprend l'intérêt du montage, le courant i_e est la somme de deux courants. Pendant une partie de la période quand l'un des courants est croissant, l'autre est décroissant, ce qui réduit l'ondulation du courant résultant.

Physique. Sujet 4. E3A PSI 2013

Capteur de proximité à reluctance variable

1. Soit \mathcal{C} un contour fermé orienté et $I_{l, enl}$ les courants libres enlacés par ce contour (comptés positifs si orientés conformes) :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{l, enl}$$

2. On oriente le contour Γ dans le sens horaire (figure 4 de l'énoncé), le théorème d'Ampère conduit à :

$$H_1 \times l_1 + H_0 \times 2x + H_2 \times l_2 = NI$$

3. Le champ magnétique est à flux conservatif ($\text{div} \vec{B} = 0$); le circuit magnétique constituant un tube de courant, le flux du champ magnétique se conserve à travers toute section droite du tube de courant.

La section du tube vaut a^2 dans le capteur inductif, a^2 dans l'air et $e \times a$ dans le ruban en défilement. On en déduit grâce à la conservation du flux :

$$\Phi = B_1 a^2 = B_2 a e = B_0 a^2$$

4. Pour des matériaux linéaires : $B_1 = \mu_1 H_1$, $B_0 = \mu_0 H_0$ et $B_2 = \mu_2 H_2$.

En utilisant la conservation du flux et le théorème d'Ampère, on obtient :

$$\frac{B_1}{\mu_1} \times l_1 + \frac{B_1}{\mu_0} \times 2x + \frac{B_1}{\mu_2} \times l_2 \frac{a}{e} = NI$$

$$B_1 \left(\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2x}{\mu_0} + \frac{l_2 a}{\mu_2 e} \right) = NI \Leftrightarrow B_1 = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2x}{\mu_0} + \frac{l_2 a}{\mu_2 e}}$$

5. Un matériau ferromagnétique peut posséder une **aimantation en l'absence d'excitation magnétique**. Un matériau ferromagnétique est caractérisé par un **cycle d'hystérésis** lorsque l'on représente le champ magnétique en fonction de l'excitation magnétique.

Comme exemples de matériaux ferromagnétiques, on peut citer **le fer, le nickel, le cobalt** ou des alliages de ces éléments.

Pour un matériau doux non saturé, on peut supposer une relation linéaire entre le champ magnétique et l'aimantation et négliger en cela les pertes par hystérésis.

Si le matériau est de plus feuilleté, on peut négliger les courants de Foucault au sein du matériau.

6. En présence d'un bobinage de N spires :

$$\Phi_b = N B_1 a^2$$

En remplaçant le champ magnétique par son expression en fonction de l'intensité, le flux prend la forme :

$$\Phi_b = \left(\frac{N^2 a^2}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2x}{\mu_0} + \frac{l_2 a}{\mu_2 e}} \right) \times I$$

Par définition : $\Phi_b = L(x) \times I$, donc : $L(x) = \frac{N^2 a^2}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2x}{\mu_0} + \frac{l_2 a}{\mu_2 e}}$.

7. Avec $x = x_0 + \Delta x$, l'inductance prend la forme :

$$L(x) = \frac{N^2 a^2}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2x_0}{\mu_0} + \frac{l_2 a}{\mu_2 e} + \frac{2\Delta x}{\mu_0}} = \frac{N^2 a^2}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2x_0}{\mu_0} + \frac{l_2 a}{\mu_2 e}} \times \frac{1}{1 + \frac{2}{\mu_0} \frac{\Delta x}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2x_0}{\mu_0} + \frac{l_2 a}{\mu_2 e}}}$$

On en déduit $L_0 = \frac{N^2 a^2}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2x_0}{\mu_0} + \frac{l_2 a}{\mu_2 e}}$ et $A = \frac{2}{\mu_0} \frac{1}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2x_0}{\mu_0} + \frac{l_2 a}{\mu_2 e}}$.

8. Attention qu'ici Φ représente le flux à travers une seule spire $\Phi = \Phi_b / N = L(x)I / N$.

Avec $\mathcal{R} = \frac{NI}{\Phi}$, donc $\mathcal{R} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{2x}{\mu_0} + \frac{l_2 a}{\mu_2 e} \right)$

Avec $\Phi = L(x)I / N$, $\mathcal{R} = \frac{N^2}{L(x)}$.

La réluctance est la capacité d'un circuit magnétique à s'opposer à sa pénétration par un champ magnétique. Pour une excitation magnétique donnée (terme proportionnel à NI), la réluctance est d'autant plus grande que le flux est faible.

On peut faire l'analogie avec la résistance électrique, le terme NI jouant le rôle de la tension et le flux magnétique celui du courant électrique.

Comme le montre la première formule, le déplacement du capteur est associé à une variation de la réluctance du circuit.

9. Par définition $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega_G}$, $\underline{Z}_{L_0} = jL_0\omega_G$, $\underline{Z}_{L(x)} = jL(x)\omega_G$.

On en déduit :

$$\Delta \underline{Z} = j\omega_G (L(x) - L_0) = jL_0\omega_G \left(\frac{1}{1 + A\Delta x} - 1 \right) \Leftrightarrow \boxed{\Delta \underline{Z} = \frac{-j\omega_G L_0 A \Delta x}{1 + A\Delta x}}$$

10. Il s'agit d'une structure en pont de Wheatstone, ce pont est équilibré si le produit des impédances croisées est égal. Pour montrer cela, on applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{V}_A = \frac{jL_0\omega_G}{R + jL_0\omega_G} \underline{V}_G \quad \text{et} \quad \underline{V}_B = \frac{jRC_0\omega_G}{1 + jRC_0\omega_G} \underline{V}_G$$

L'égalité $\underline{V}_A = \underline{V}_B$ nécessite :

$$\frac{jL_0\omega_G}{R + jL_0\omega_G} = \frac{jRC_0\omega_G}{1 + jRC_0\omega_G} \Leftrightarrow jL_0\omega_G (1 + jRC_0\omega_G) = jRC_0\omega_G (R + jL_0\omega_G)$$

Ce qui impose : $\boxed{C_0 = L_0/R^2}$.

Application numérique : $C_0 = \frac{0,3 \times 10^{-3}}{10^6}$ donc $\boxed{C_0 = 0,3 \times 10^{-9} \text{ F}}$

11. On reprend le calcul de la différence de potentiel dans le cas général :

$$\underline{V}_A - \underline{V}_B = \underline{V}_G \left(\frac{jL\omega_G}{1 + jL\omega_G} - \frac{jRC_0\omega_G}{1 + jRC_0\omega_G} \right)$$

$$\underline{V}_A - \underline{V}_B = \underline{V}_G \left(\frac{jL_0\omega_G}{1 + A\Delta x} \frac{1}{R + \frac{jL_0\omega_G}{1 + A\Delta x}} - \frac{jRC_0\omega_G}{1 + jRC_0\omega_G} \right)$$

Sachant que $\frac{jL_0\omega_G}{R + jL_0\omega_G} = \frac{jRC_0\omega_G}{1 + jRC_0\omega_G}$, l'expression précédente peut se réécrire :

$$\underline{V}_A - \underline{V}_B = \underline{V}_G \left(\frac{jL_0\omega_G}{1 + A\Delta x} \frac{1}{R + \frac{jL_0\omega_G}{1 + A\Delta x}} - \frac{jL_0\omega_G}{R + jL_0\omega_G} \right)$$

$$\boxed{\underline{V}_A - \underline{V}_B = \underline{V}_G jL_0\omega_G \left(\frac{1}{R(1 + A\Delta x) + jL_0\omega_G} - \frac{1}{R + jL_0\omega_G} \right)}$$

12. Dans l'approximation $L_0\omega_G \ll R$, l'expression se simplifie selon :

$$\underline{U}_{mes} = jL_0\omega_G \underline{V}_G \left(\frac{1}{R(1 + A\Delta x)} - \frac{1}{R} \right) = j \frac{L_0\omega_G}{R} \underline{V}_G \left(\frac{1}{1 + A\Delta x} - 1 \right)$$

$$\underline{U}_{mes} = j \frac{L_0\omega_G}{R} \underline{V}_G \left(\frac{-A\Delta x}{1 + A\Delta x} \right) = -j \times \frac{L_0\omega_G A \Delta x}{R(1 + A\Delta x)} \times \underline{V}_G$$

et donc : $\boxed{U_{mes} = \frac{L_0\omega_G \underline{V}_G A \Delta x}{R(1 + A\Delta x)}}$ et $\boxed{\varphi = -\pi/2}$.

13. À l'ordre 1, $\boxed{U_{mes,lin} = \frac{L_0\omega_G}{R} \underline{V}_G A \Delta x}$, ce qui donne pour l'erreur relative :

$$\varepsilon = \frac{1 - 1/(1 + A\Delta x)}{1/(1 + A\Delta x)} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = A\Delta x}$$

A.N : $\varepsilon = 50 \times 10^{-3}$ donc $\underline{\varepsilon} = 5,0\%$.

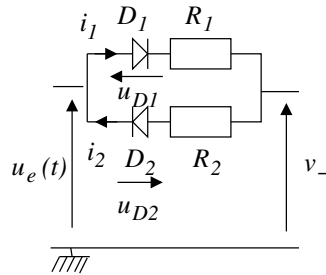
Physique. Sujet 5. Banque PT 2016 (extrait)

Réalisation d'un signal en « dent de scie »

Très généralement, la présence des diodes va permettre de choisir le passage du courant par la résistance R_1 ou R_2 selon que le condensateur se charge ou se décharge, on va donc pouvoir dissymétriser le fonctionnement de l'oscillateur.

Étude de l'étage 1

1. L'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire (rétroaction sur l'entrée inverseuse), on a $v_- = 0$.



→ diode D_1 passante : ceci implique $u_{D1} = 0$ et donc $u_e(t) = R_1 i_1$ et ceci à condition que $i_1 > 0$ et donc $u_e(t) > 0$.

→ diode D_2 passante : ceci implique $u_{D2} = 0$ et donc $u_e(t) = -R_2 i_2$ et ceci à condition que $i_2 > 0$ et donc $u_e(t) < 0$.

2. Pour $u_e(t) > 0$, seule la diode D_1 est passante, l'application de la loi des nœuds à l'entrée inverseuse conduit à ($v_- = 0$) :

$$\frac{u_e - v_-}{R_1} = jC\omega (v_- - u_s) \Leftrightarrow u_e = -jR_1 C \omega u_s$$

Ce qui donne pour l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{du_s(t)}{dt} = -\frac{u_e(t)}{R_1 C} \text{ pour } u_e(t) > 0}$$

Pour $u_e(t) < 0$, la diode D_2 est passante :

$$\boxed{\frac{du_s(t)}{dt} = -\frac{u_e(t)}{R_2 C} \text{ pour } u_e(t) < 0}$$

Il s'agit bien évidemment d'un montage intégrateur.

Étude de l'étage 2

1. L'absence de rétroaction sur l'entrée inverseuse impose un régime de saturation.

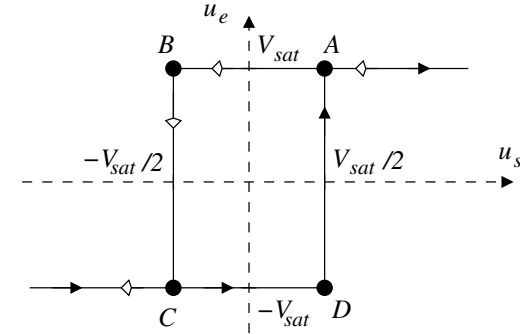
2. On commence par appliquer la loi des nœuds à l'entrée non inverseuse :

$$\frac{u_s - v_+}{R_3} = \frac{v_+ - u_e}{2R_3} \Leftrightarrow 2u_s + u_e = 3v_+$$

→ $u_e = +V_{sat}$ à condition que $v_+ > v_- = 0$, c'est à dire $u_s > -V_{sat}/2$;

→ $u_e = -V_{sat}$ à condition que $v_+ < v_- = 0$, c'est à dire $u_s < +V_{sat}/2$.

Ce qui se traduit du fait de l'effet mémoire de l'hystérésis :



Étude de l'oscillateur

1. La tension de sortie de l'étage 2 venant de basculer à $+V_{sat}$, le système se trouve nécessairement au point de fonctionnement A du cycle d'hystérésis.

La tension $u_e = +V_{sat} > 0$, ceci impose :

$$\frac{du_s(t)}{dt} = -\frac{V_{sat}}{R_1 C} \Rightarrow \boxed{u_s(t) = -\frac{V_{sat}}{R_1 C} \times t + \frac{V_{sat}}{2}}$$

Le système bascule en saturation basse pour $u_s(t_1) = -\frac{V_{sat}}{2}$, c'est à dire :

$$-\frac{V_{sat}}{2} = -\frac{V_{sat}}{R_1 C} \times t_1 + \frac{V_{sat}}{2} \Leftrightarrow \boxed{t_1 = \Delta t_{haut} = R_1 C}$$

2. Partant de $t = t_1^+$ avec $u_s(t_1) = -\frac{V_{sat}}{2}$ et $u_e = -V_{sat}$:

$$\frac{du_s(t)}{dt} = +\frac{V_{sat}}{R_2 C} \Rightarrow \boxed{u_s(t) = \frac{V_{sat}}{R_2 C} \times (t - t_1) - \frac{V_{sat}}{2}}$$

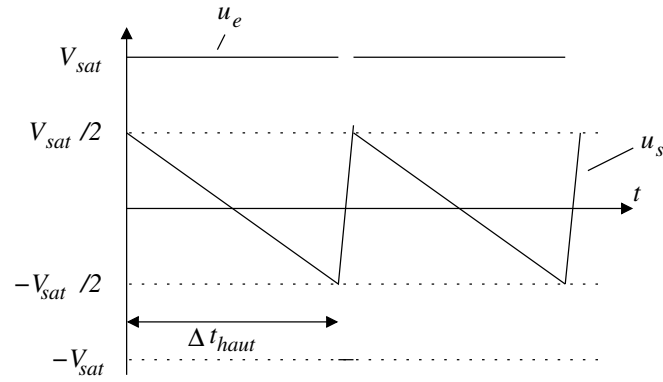
Le basculement se produit pour $u_s(t_2) = \frac{V_{sat}}{2}$, c'est à dire :

$$\frac{V_{sat}}{2} = \frac{V_{sat}}{R_2 C} \times (t_2 - t_1) - \frac{V_{sat}}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta t_{bas} = t_2 - t_1 = R_2 C}$$

3. Avec $\Delta t_{bas} = 19\Delta t_{haut}$, on obtient :

Physique. Sujet 6. ENS-Lyon PC 2016

Étude d'une éolienne



1. Pour un écoulement incompressible, le vecteur vitesse est à flux conservatif ($\text{div}(\vec{v}) = 0$). En supposant la vitesse uniforme en amont et en aval, cela impose : $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Le vent transmet son énergie cinétique à l'éolienne, nécessairement $v_2 < v_1$. La conservation du débit volumique impose $S_2 > S_1$ et un évasement du tube de courant.

2.
$$q_m = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2 = \rho v S$$

3. Détermination de la vitesse v .

- (a) On considère le système fermé constitué du fluide contenu à l'instant t dans la portion $\Sigma = [1, 2]$ du tube de courant, et du fluide qui s'apprête à entrer dans la portion $[1, 2]$ pendant dt . En appliquant le théorème de la résultante cinétique, on obtient :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \left(\vec{F}_{r/a} + \vec{F}_{\text{pression}} \right) dt$$

La pression étant uniforme égale à p_0 sur la surface fermée limitant le système : $\vec{F}_{\text{pression}} = \vec{0}$.

Le caractère stationnaire de l'écoulement permet de simplifier le terme de gauche :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \underbrace{\vec{p}_{\Sigma}(t + dt) - \vec{p}_{\Sigma}(t)}_{=\vec{0}} + \delta\vec{p}_2 - \delta\vec{p}_1 = q_m dt (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

On en déduit :
$$\vec{F}_{r/a} = q_m (v_2 - v_1) \vec{u}_x$$

- (b) Pour l'écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide pour lequel on néglige les phénomènes de dissipation, le théorème de Bernoulli appliqué le long d'une ligne de courant conduit à :

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_0}{\rho} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{p_E}{\rho} \Rightarrow p_E = p_0 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v^2)$$

$$\frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_0}{\rho} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{p_S}{\rho} \Rightarrow p_S = p_0 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v^2)$$

- (c) On considère le système fermé constitué du fluide contenu à l'instant t dans la portion Σ' entre (E) et (S) , et du fluide qui s'apprête à entrer dans la portion Σ' pendant dt . En appliquant le théorème de la résultante cinétique, on obtient :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \left(\vec{F}_{r/a} + \vec{F}_{\text{pression}} \right) dt = \vec{F}_{r/a} dt + [p_E S - p_S S] dt \vec{u}_x$$

Le caractère stationnaire de l'écoulement permet de simplifier le terme de gauche :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \underbrace{\vec{p}_{\Sigma'}(t + dt) - \vec{p}_{\Sigma'}(t)}_{=\vec{0}} + \delta\vec{p}_2 - \delta\vec{p}_1 = q_m dt (\vec{v} - \vec{v}) = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\vec{F}_{r/a} = [p_S - p_E] S \vec{u}_x \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{r/a} = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) S \vec{u}_x}$$

(d) En identifiant les deux expressions, on obtient :

$$\frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) S = \frac{\rho}{2} (v_2 - v_1) (v_2 + v_1) S = q_m (v_2 - v_1) = \rho S v (v_2 - v_1)$$

Comme indiqué à la première question $v_2 \neq v_1$, on en déduit :

$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{2}}$$

4. Puissance transférée de l'écoulement à l'éolienne.

(a) On considère le système fermé constitué du fluide contenu à l'instant t dans la portion $\Sigma = [1, 2]$ du tube de courant, et du fluide qui s'apprête à entrer dans la portion $[1, 2]$ pendant dt . En appliquant le théorème de la puissance mécanique, on obtient :

$$E_c(t + dt) - E_c(t) = (\mathcal{P}_{r \rightarrow a} + \mathcal{P}_{\text{pression}}) dt$$

Sur la portion latérale, la force de pression est perpendiculaire à la vitesse, la puissance des forces de pression se limite aux forces de pression en amont et en aval :

$$\mathcal{P}_{\text{pression}} = p_0 S_1 v_1 - p_0 S_2 v_2 = p_0 \underbrace{[S_1 v_1 - S_2 v_2]}_{\text{div}(\vec{v})=0} = 0$$

Le caractère stationnaire de l'écoulement permet de simplifier le terme de gauche :

$$E_c(t + dt) - E_c(t) = \underbrace{E_{c,\Sigma}(t + dt) - E_{c,\Sigma}(t)}_{=0} + \delta E_{c,2} - \delta E_{c,1} = \frac{1}{2} q_m dt (v_2^2 - v_1^2)$$

On en déduit : $\mathcal{P}_{r \rightarrow a} = \frac{1}{2} q_m (v_2^2 - v_1^2)$; la puissance recherchée est la puissance opposée, action de l'air sur le rotor :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{2} q_m (v_2^2 - v_1^2)}$$

(b) Ce terme représente la puissance cinétique en amont de l'écoulement, c'est l'énergie cinétique δE_c d'un écoulement de vitesse v_1 qui traverserait la section S en l'absence d'éolienne pendant dt :

$$\frac{\delta E_c}{dt} = \frac{1/2 \times (\rho S v_1 dt) v_1^2}{dt} = \mathcal{P}^*$$

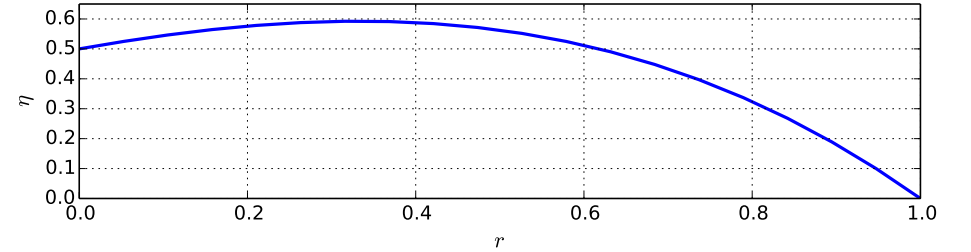
Il faut bien raisonner avec une section S et non avec la section S_1 du tube car l'éolienne occupant une section droite S , il n'est pas possible d'utiliser l'air entre S_1 et S pour placer une seconde éolienne.

(c) Le rendement est le rapport de la puissance transférée à l'éolienne sur la puissance cinétique de l'écoulement arrivant sur l'éolienne :

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}^*} = \frac{1}{2} \rho S v (v_2^2 - v_1^2) \times \frac{1}{\frac{1}{2} \rho S v_1^3} = \frac{v_1 + v_2}{2} \times \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_1^3}$$

$$\text{Avec } r = v_2/v_1 : \eta^* = \frac{(1+r)(1-r^2)}{2} \quad \boxed{\eta^* = \frac{(1+r)^2(1-r)}{2}}$$

(d) Représentation graphique :



(e) Le rendement est maximal pour $\frac{d\eta^*}{dr} = 0$:

$$\frac{d\eta^*}{dr} = \frac{1}{2} [2(1+r)(1-r) - (1+r)^2] = \frac{1}{2} (1+r)(1-3r)$$

Ce qui impose $r = 1/3$ et :

$$\eta_{max}^* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\eta_{max}^* = \frac{16}{27}}$$

5. Quelques remarques sur le cadre de l'étude.

(a) La forme du tube de courant impose nécessairement l'existence d'une composante radiale pour le vecteur vitesse sinon la section resterait uniforme.

(b) La démonstration du théorème de Bernoulli à partir du premier principe de la thermodynamique impose l'absence de travaux mécaniques autres que ceux des forces de pression en amont et en aval ($W'_{ext} = 0$). Ici une partie de l'énergie est transférée à l'éolienne.

De plus l'écoulement n'est sans doute pas stationnaire au niveau des pales du rotor (turbulence).

(c) Il faut sans doute tenir compte de la forme des pales et de leur nombre.

Physique. Sujet 7. Centrale-Supélec PSI 2006 (extrait)

Ondes électromagnétiques dans l'eau

A . Équation de propagation dans l'eau de mer

1. On combine l'équation de conservation de la charge, la loi d'Ohm locale et l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} (\gamma \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\gamma \rho}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

On en déduit : $\boxed{\tau' = \varepsilon / \gamma}$.

Supposons que localement une perturbation de charge volumique d'amplitude ρ_0 apparaisse à $t = 0$, la charge volumique évolue alors selon :

$$\rho(t) = \rho_0 \exp(-t/\tau')$$

La perturbation s'atténue en une durée :

$$\tau' = \frac{81 \times 8,85 \times 10^{-12}}{4} = 1,8 \times 10^{-10} \text{ s}$$

Pour des fréquences inférieures au MHz, la période T est supérieure à la microseconde, très grande devant τ' le temps de mise à l'équilibre de la charge volumique, on peut donc considérer que la charge volumique est toujours nulle.

$$2. \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega}{\gamma} = \frac{81 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 2\pi \times 10^6}{4} \simeq 10^{-3} \ll 1.$$

Pour une onde monochromatique, l'équation de Maxwell-Ampère prend la forme :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + i \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega \vec{E} \right)$$

D'après le résultat précédent, on peut négliger le courant de déplacement vis à vis du courant de charges, l'équation prend alors la forme simplifiée :

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}}$$

On combine alors cette équation avec l'équation de Maxwell Faraday :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma \vec{E})$$

Comme $\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ (absence de charge volumique), on en déduit finalement :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

On reconnaît une équation de diffusion (Cf. cours sur l'effet de peau).

B . Réflexion et transmission à l'interface air-eau

1. Avec une origine des temps bien choisie (avec $k = \omega/c$) :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \underline{\vec{E}} \quad \text{donc} \quad \boxed{B_0 = \frac{E_0}{c}}$$

2. Pour la moyenne du vecteur de Poynting :

$$\langle \vec{P} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^* \right) = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \vec{u}_z \quad \boxed{\langle \vec{P} \rangle = c \times \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{u}_z}$$

3. Pour obtenir l'équation de dispersion, on reporte l'expression proposée dans l'équation de diffusion :

$$-k_t^2 \underline{\vec{E}} = \mu_0 \gamma i \omega \underline{\vec{E}} \quad \Rightarrow \quad k_t^2 = -i \omega \mu_0 \gamma = \omega \mu_0 \gamma e^{-i\pi/2}$$

On retient la racine associée à une propagation selon les z croissants :

$$k_t = \sqrt{\omega \mu_0 \gamma} e^{-i\pi/4} = \sqrt{\omega \mu_0 \gamma} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_t = \frac{1-i}{\delta}}$$

4. En l'absence de courants surfaciques, les relations de passage, appliquées en $z = 0$, assurent la continuité des composantes tangentielles du champ électrique et du champ magnétique.

$$\underline{E}_i + \underline{E}_r = \underline{E}_t \quad \text{et} \quad \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \underline{\vec{E}}_i - \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \underline{\vec{E}}_r = \frac{(1-i)\vec{u}_z}{\delta \omega} \wedge \underline{\vec{E}}_t$$

Pour obtenir la dernière relation, on a utilisé le fait que dans l'eau la relation entre le champ électrique et le champ magnétique prend la forme :

$$\underline{\vec{B}}_t = \frac{k_t \vec{u}_z}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}_t$$

$$E_0 + r E_0 = t E_0 \quad \text{et} \quad \frac{E_0}{c} - \frac{r E_0}{c} = \frac{1-i}{\omega \delta} t E_0$$

On en déduit avec :

$$\boxed{\underline{t} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{r} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$

5. $\underline{\vec{E}}_t = \frac{2\alpha}{1+\alpha} E_0 e^{i(\omega t - (1-i)z/\delta)}$, donc $\boxed{\underline{\vec{E}}_t = \frac{2\alpha}{1+\alpha} E_0 e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \vec{u}_x}$

Et pour le champ magnétique : $\underline{\vec{B}}_t = \frac{k_t \vec{u}_z}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}_t$.

6. On calcule alors la moyenne du vecteur de Poynting pour l'onde transmise :

$$\langle \vec{P}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(\underline{\vec{E}}_t^* \wedge \underline{\vec{B}}_t \right) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(\underline{\vec{E}}_t^* \wedge \left[\frac{k_t \vec{u}_z}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}_t \right] \right)$$

$$\langle \vec{P}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0 \omega} |\underline{E}_t|^2 \text{Re}(k_t) \vec{u}_z = \frac{1}{2\mu_0 \omega \delta} \times \frac{4|\alpha|^2}{|1+\alpha|^2} E_0^2 e^{-2z/\delta} \vec{u}_z$$

On peut alors remarquer que : $|\alpha| = \alpha/\sqrt{2}$; pour les fréquences les plus élevées considérées dans le problème :

$$|\alpha| = \sqrt{\frac{2 \times 2\pi \times 10^6 \times 8,85 \times 10^{-12}}{2 \times 4}} = 3,7 \times 10^{-3} \ll 1$$

Il est donc raisonnable de négliger α par rapport à 1 au dénominateur. On en déduit alors (avec $\alpha c = \omega \delta$) :

$$\langle \vec{P}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0 \omega \alpha c} \times 4\alpha^2/2 \times E_0^2 e^{-2z/\delta} \vec{u}_z \quad \boxed{\langle \vec{P}_t \rangle = c \times \varepsilon_0 \times \alpha \times E_0^2 e^{-2z/\delta} \vec{u}_z}$$

7. La moyenne du vecteur de Poynting incident vaut $P = c \times \varepsilon_0 \times E_0^2/2$, on en déduit :

$$\boxed{T = 2\alpha e^{-2z/\delta}}$$

Application numérique :

f	α	δ (m)	$T(z=0)$	$T(z=10 \text{ m})$
1 kHz	$1,67 \times 10^{-4}$	7,96	$3,34 \times 10^{-4}$	$2,7 \times 10^{-5}$
1 MHz	$5,27 \times 10^{-3}$	0,25	$1,05 \times 10^{-2}$	$\simeq 2 \times 10^{-37}$

On constate que les fréquences de l'ordre du MHz sont totalement atténuées sur une épaisseur de 10 m; même pour des fréquences de l'ordre du kHz, il faut se placer très près de la surface pour récupérer un signal émis depuis l'atmosphère.

Ondes sonores dans l'océan

1. La durée de propagation est la somme des durées de propagation dans chacun des milieux :

$$\tau = \frac{AM}{c_1} + \frac{MB}{c_2}$$

On pose $x = A'M$, $l_1 = AA'$, $l_2 = B'B$, $L = A'B'$, la relation précédente prend la forme :

$$\tau(x) = \frac{\sqrt{x^2 + l_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + l_2^2}}{c_2}$$

On cherche le point M pour lequel la durée τ est minimale, ce qui revient à chercher les annulations de la dérivée de τ par rapport à x :

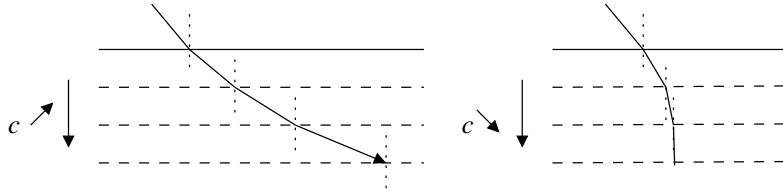
$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + l_1^2}} - \frac{1}{c_2} \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + l_2^2}} = 0$$

Ce qui impose (on admettra qu'il s'agit d'un minimum) :

$$\frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + l_1^2}} = \frac{1}{c_2} \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + l_2^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}}$$

2. Milieux stratifiés.

- (a) La grandeur conservée est $\boxed{\frac{\sin \theta}{c} = cste}$. Quand la célérité augmente, l'angle d'incidence doit augmenter pour maintenir le rapport constant. On obtient alors les rayons acoustiques suivants :



(b) Dépendance affine

- i. Sur chaque portion affine, on peut écrire : $\beta = \frac{1}{c_0} \left(\frac{c(z_2) - c(z_1)}{z_1 - z_2} \right)$
- pour $z < 1 \text{ km}$: $\beta \simeq \frac{1}{1,5 \times 10^3} \left(\frac{1490 - 1530}{-1000} \right) \simeq 3 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$
- pour $z > 1 \text{ km}$: $\beta \simeq \frac{1}{1,5 \times 10^3} \left(\frac{1520 - 1500}{2000} \right) \simeq -7 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$
- ii. Dans chacun des cas $|\beta z| \ll 1$.
- iii. L'invariant peut être écrit à la surface et pour une profondeur quelconque :

$$\frac{\sin(\theta_0)}{c_0} = \frac{\sin(\theta)}{c} = \frac{1}{c_0(1-\beta z)} \times \frac{dx}{\sqrt{dz^2 + dx^2}}$$

$$\sin(\theta_0) \times \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{1}{1-\beta z}$$

Avec $\theta_0 = \pi/4$ et en élevant au carré, on obtient l'équation proposée :

$$\boxed{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{2}{(1-\beta z)^2}}$$

- iv. Comme $|\beta z| \ll 1$, on commence par effectuer un développement à l'ordre 1 de l'expression précédente :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{2}{(1-\beta z)^2} - 1 \simeq 2(1+2\beta z) - 1 = 1 + 4\beta z$$

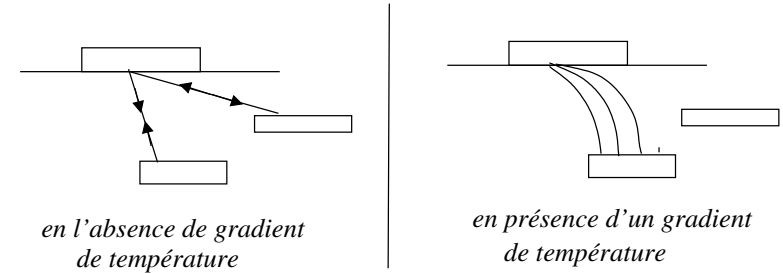
On dérive alors cette expression par rapport à x :

$$2 \times \frac{dz}{dx} \times \frac{d^2z}{dx^2} = 4\beta \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{d^2z}{dx^2} = 2\beta \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2\beta x + \left(\frac{dz}{dx}\right)_0$$

Avec $\theta_0 = \pi/4$, $(dz/dx)_0 = 1$, donc $\frac{dz}{dx} = 2\beta x + 1$ et finalement :

$$\boxed{z(x) = \beta x^2 + x} \quad \text{car } z(0) = 0$$

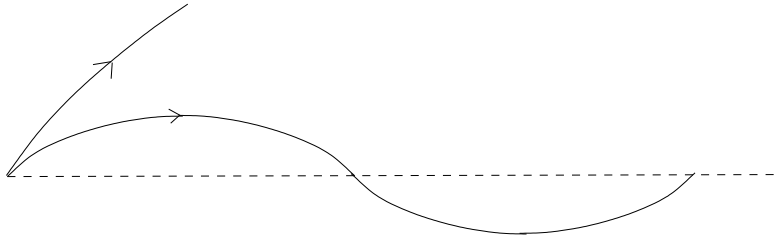
- v. Ceci s'explique par la courbure des trajectoires comme le montrent les schémas ci-dessous pour lesquels on a utilisé la loi du retour inverse :



En présence d'un fort gradient thermique (surface surchauffée au milieu de la journée), les rayons émis sont fortement courbés et ne peuvent atteindre que des sous-marins placés sous l'émetteur.

3. Le canal SOFAR.

- (a) La célérité augmentant quand on s'écarte de la profondeur d'émission, l'angle d'incidence augmente aussi et les ondes vont se retrouver bloquer entre deux profondeurs si l'angle d'incidence initial est suffisant (d'où le nom de canal).



(b) Ceci est l'analogie d'une fibre à gradient d'indice pour laquelle l'indice est plus élevé au centre de la fibre qu'à la périphérie ce qui peut provoquer le phénomène de réflexion totale. (une diminution d'indice correspond à une augmentation de la célérité).

Physique. Sujet 8. D'après CCP PSI 2010 (extrait)

Magnétron

- On commence par déterminer l'impédance équivalente pour l'association $\{L, C\}$ parallèle, $Z_{eq} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$.

On applique alors la loi des nœuds au niveau du n^{ieme} nœud :

$$\frac{u_{n-1} - u_n}{Z_{eq}} = j\Gamma\omega \times (u_n - 0) + \frac{u_n - u_{n+1}}{Z_{eq}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_{n-1} - u_n}{jL\omega} (1 - LC\omega^2) = j\Gamma\omega u_n + \frac{u_n - u_{n+1}}{jL\omega} (1 - LC\omega^2)$$

On en déduit : $(u_{n-1} + u_{n+1}) [1 - LC\omega^2] = u_n \times [2 - 2LC\omega^2 - L\Gamma\omega^2]$.

- On reporte la forme proposée dans la relation précédente : $(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) [1 - LC\omega^2] = [2 - 2LC\omega^2 - L\Gamma\omega^2]$

On en déduit : $\cos(\alpha) = 1 - \frac{L\Gamma\omega^2}{2(1 - LC\omega^2)}$.

- La périodicité du système impose :

$$u_{N+1} = u_1 \Leftrightarrow e^{-jN\alpha} = 1$$

Ce qui impose $\alpha_p = \frac{2p\pi}{N}$ avec $p \in [0, N - 1]$ pour des valeurs distinctes.

- On a : $\cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right) = 1 - \frac{L\Gamma\omega_p^2}{2(1 - LC\omega_p^2)}$ $p \in [0, N - 1]$.

La solution $p = 0$ correspond à $\omega = 0$ et donc à une solution permanente non oscillante que l'on oublie pour la suite.

Pour $p \in [1, N - 1]$:

$$\frac{L\Gamma\omega_p^2}{2(1 - LC\omega_p^2)} = 1 - \cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right) = 2\sin^2\left(\frac{p\pi}{N}\right)$$

$$\Leftrightarrow L\Gamma\omega_p^2 = 4\sin^2\left(\frac{p\pi}{N}\right) \times [1 - LC\omega_p^2] \Leftrightarrow \omega_p^2 = \frac{4\sin^2\left(\frac{p\pi}{N}\right)}{L\Gamma + 4LC\sin^2\left(\frac{p\pi}{N}\right)}$$

On en déduit :

$$\forall p \in [1, N - 1], \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Gamma}{4C\sin^2\left(\frac{p\pi}{N}\right)}}}$$

Propagation sur une ligne électrique

1. Avec $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$, on en déduit :

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 4 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\omega = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|}$$

2. Rechercher la vitesse de phase revient à chercher les valeurs du couple $\{t, n\}$ vérifiant $\omega t - n\alpha = 0$, c'est à dire :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{n}{t} = \frac{\omega}{\alpha}}$$

3. Aux fréquences faibles telles que $\omega \ll \omega_0$.

(a) Pour $\omega \ll \omega_0$, on a nécessairement $\alpha \ll 1$ rad, ce qui donne :

$$\omega = 2\omega_0 \times \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \omega = \omega_0 \times \alpha$$

C'est à dire pour la vitesse de phase : $\boxed{v_\varphi = \omega_0}$.

(b) **La vitesse de phase ne dépend pas de la fréquence**, le milieu n'est pas dispersif.

(c) L'état de perturbation qui est à la cellule 0 à l'instant initial se trouve au niveau de la cellule n à l'instant t_n :

$$t_n = \frac{n}{v_\varphi} = \frac{n}{\omega_0} = n\tau$$

Entre deux cellules, il y a un retard $\boxed{\tau = 1/\omega_0}$.

On peut retrouver ce résultat en reportant l'expression de α dans la forme de l'onde progressive :

$$\underline{u}_n(t) = u_0 e^{i(\omega t - n\alpha)} = u_0 e^{i(\omega t - n\omega/\omega_0)} = u_0 e^{i\omega(t - n\tau)}$$

On peut donc bien parler de « ligne à retard »

(d) Application numérique :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{25 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^{-9}}} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 2,0 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}}$$

$$\boxed{\tau = 5,0 \times 10^{-7} \text{ s}}$$

Il faut **200 cellules** pour générer un retard de 0,10 ms.

Pour le câble coaxial : $L = c \times \tau = 2,0 \times 10^8 \times 10^{-4}$ $\boxed{L = 20 \text{ km}}$.

4. Par analogie avec la définition de la vitesse de phase, on peut proposer

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{d\alpha}}$$

On peut retrouver ce résultat en recherchant les couples $\{n, t\}$ tels que :

$$\frac{d(\omega t - n\alpha)}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow t - n \frac{d\alpha}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{t} = \frac{d\omega}{d\alpha}$$

$$v_g = \frac{d}{d\alpha} \left[2\omega_0 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \Rightarrow \boxed{v_g = \omega_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Pour $\alpha \rightarrow 0$, $v_g = v_\varphi = \omega_0$.

Pour $\alpha \rightarrow \pi$, $v_g \rightarrow 0$, il n'y plus de propagation possible, en cohérence avec le fait que ω doit rester inférieure à $2\omega_0$ pour des solutions en ondes progressives.

Physique. Sujet 9. D'après Mines PSI 2014 (extrait)

II - Étude d'un conducteur ohmique torique

- ϵ_0 se nomme « **permittivité du vide** ». Cette constante s'exprime usuellement en $\boxed{\text{F.m}^{-1}}$ dans le système international d'unités.
- On part de l'équation locale de conservation de la charge et on injecte la loi d'Ohm locale :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \gamma \text{div} \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Il reste alors à utiliser l'équation de Maxwell-Gauss pour obtenir :

$$\gamma \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0 \text{ avec } \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}}$$

Si un déséquilibre de charges apparaît, il est atténué en une durée caractéristique τ . Pour un régime variable de période $T \gg \tau$, on peut considérer que le système se met immédiatement à l'équilibre et la charge en volume est donc toujours nulle.

Application numérique : $\tau = \frac{1 \times 10^{-9}}{36\pi \times 10^8} \Rightarrow \boxed{\tau = 8,9 \times 10^{-20} \text{ s}}$

- L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit : $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$. Pour un régime sinusoïdal de période T au sein d'un matériau ohmique, les deux termes valent en ordre de grandeur :

$$j \sim \gamma E \text{ et } \left| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| \sim \epsilon_0 \frac{E}{T}$$

C'est à dire pour le rapport des deux termes :

$$\frac{j}{\epsilon_0 E/T} \sim \frac{\gamma E}{\epsilon_0 E/T} \sim \frac{T}{\tau}$$

Pour $T \gg \tau$, le courant de déplacement est négligeable vis à vis du courant de charges.

- En régime permanent, le potentiel scalaire vérifie l'équation de Poisson :

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0}$$

Le milieu ohmique n'ayant pas de charges en volume, le potentiel vérifie dans ce milieu l'équation de Laplace :

$$\boxed{\Delta V = 0}$$

- La dernière expression prend la forme simplifiée : $\frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0$. Le potentiel est

une fonction affine de la position angulaire, compte-tenu des conditions aux limites on obtient :

$$\boxed{V = U \left(1 - \frac{\theta}{\alpha} \right)}$$

On en déduit alors le champ électrique :

$$\vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{U}{\alpha r} \vec{u}_\theta}$$

Et finalement le vecteur courant à l'aide de la loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{j} = \frac{\gamma U}{\alpha r} \vec{u}_\theta}$

- L'intensité est associée au flux du vecteur courant à travers la section droite du tore, le vecteur surface étant orienté selon \vec{u}_θ :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{r=a}^b \int_{z=0}^c \frac{\gamma U}{\alpha r} dr dz \Rightarrow \boxed{I = \frac{\gamma U c}{\alpha} \ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

La résistance est le rapport de la tension par le courant :

$$\boxed{R = \frac{\alpha}{\gamma c \ln \left(\frac{b}{a} \right)}}$$

- Un conducteur filiforme a une résistance $\boxed{R = \frac{L}{S\gamma}}$

Pour a et b voisins, on peut poser $b = a + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll a$, l'expression de la résistance orthoradiale prend la forme simplifiée :

$$R = \frac{\alpha}{\gamma c \ln(1 + \varepsilon/a)} \simeq \frac{\alpha}{\gamma c \frac{\varepsilon}{a}} \Rightarrow \boxed{R = \frac{a\alpha}{\gamma c(b-a)}}$$

Pour la portion considérée $c(b-a)$ représente la section droite et $a\alpha$ la longueur. On retrouve bien à la limite la formule du conducteur filiforme.

III - Étude d'une pince ampèremétrique

- L'ARQS consiste à négliger les effets de propagation, cela revient à négliger le courant de déplacement vis à vis du courant de charges dans l'équation de Maxwell-Ampère.

Le théorème d'Ampère prend alors la forme simplifiée :

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}}$$

avec I_{enl} les courants enlacés par le contour comptés positivement s'ils sont orientés conformément au contour.

2. D'après le théorème de superposition, le champ magnétique est la somme de deux champs : le champ créé par le tore et le champ créé par le fil infini. D'après le cours, en appliquant le théorème d'Ampère on montre que (la démonstration doit être refaite) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} [i(t) + Ni_1(t)] \vec{u}_\theta$$

3. La norme du champ magnétique étant indépendante de θ , le flux à travers les N spires est égal à N fois le flux à travers une spire :

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \times i(t) + \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \times i_1(t)$$

Le flux est la somme du flux propre et du flux extérieur :

$$\Phi = Mi(t) + Li_1(t)$$

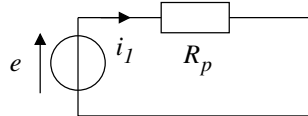
Par identification, on en déduit :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{et} \quad M = \frac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{L}{N}$$

4. Une spire a une longueur $2(b - a) + 2c$, et donc pour les N spires : $2N(b + c - a)$, ce qui donne pour la résistance :

$$R_p = 2N(b + c - a)\lambda$$

5. Le bobinage étant fermé sur lui-même, il est équivalent au circuit suivant :



$$e = R_p i_1 \quad \text{avec} \quad e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di_1}{dt} - M \frac{di}{dt}$$

C'est à dire en régime forcé :

$$-j\omega L \underline{i}_1 - j\omega M \underline{i} = R_p \underline{i}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}} = \frac{-j\omega M}{R_p + j\omega L}$$

6. Les grandeurs efficaces doivent être proportionnelles et le rapport indépendant de la fréquence, il faut donc se placer à une pulsation telle que $L\omega \gg R_p$, on a alors :

$$\frac{I_1}{I_0} \simeq \frac{j\omega M}{j\omega L} = \frac{M}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_0} = \frac{M}{L} = \frac{1}{N}$$

Avec $N \gg 1$, le courant dans la bobine torique est très inférieur au courant traversant le fil.

Physique. Sujet 10. Centrale MP 2016 (extrait)

Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique

Première partie : mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

1. L'électron est soumis à la seule force de Lorentz magnétique $\vec{f}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$. Avec $\vec{v}_0 = v_{0z}\vec{u}_z$ et $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$, la force est initialement nulle, il n'y a pas d'accélération initiale, le vecteur vitesse conserve donc sa valeur dans les premiers instants. Le raisonnement peut être répété à tout instant ultérieur, **l'électron a un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v}_0 le long des lignes de champ.**

2. Mouvement circulaire

- (a) Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, on applique la relation fondamentale de la dynamique à l'électron soumis à la seule force de Lorentz :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{eB}{m} \vec{v} \wedge \vec{u}_z$$

L'homogénéité de la formule précédente invite à poser $\omega_c = \frac{eB}{m}$, appelé pulsation cyclotron.

Un satellite géostationnaire orbite à environ $r_{geo} = 42 \times 10^3$ km du centre de la Terre (on peut retrouver ce résultat en utilisant la troisième loi de Kepler pour un satellite tournant autour de la Terre en 24 h). Le champ magnétique à la surface terrestre est de l'ordre de $B_T = 50 \mu\text{T}$. On peut alors donner une estimation du champ magnétique terrestre à la distance d'un satellite géostationnaire :

$$B_{geo} = B_T \times \frac{R_T^3}{r_{geo}^3} = 50 \times 10^{-6} \times \frac{6400^3}{42000^3} = 1,8 \times 10^{-7} \text{ T}$$

valeur que l'on peut arrondir à $B_{geo} \simeq 0,2 \mu\text{T}$. On en déduit alors :

$$\omega_c = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{-7}}{9,11 \times 10^{-31}} \quad \Rightarrow \quad \omega_c \simeq 4 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

- (b) Le champ magnétique étant selon Oz , la force n'a pas de composante selon cet axe et la vitesse selon Oz étant initialement nulle, elle le reste. On peut donc se limiter à l'étude du mouvement dans le plan xOy .

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega_c \vec{v} \wedge \vec{u}_z = -\omega_c (v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y) \wedge \vec{u}_z$$

Ce qui donne par unicité de la décomposition sur une base :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega_c v_y \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{dv_y}{dt} = \omega_c v_x \quad (2)$$

Afin de découpler les équations, on dérive la première équation par rapport au temps et on injecte alors la seconde pour en déduire :

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 v_x = 0$$

La solution est de la forme $v_x(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)$. Les conditions initiales imposent $v_x(0) = v_{0x}$ et $v_y(0) = 0$, c'est à dire en reportant dans (1) :

$$v_x(0) = v_{0x} \quad \text{et} \quad \frac{dv_x}{dt}(0) = 0$$

C'est à dire : $v_x(t) = v_{0x} \cos(\omega_c t)$; en reportant ce résultat dans (1), on en déduit $v_y(t) = v_{0x} \sin(\omega_c t)$.

Il reste à intégrer une fois pour obtenir les équations paramétriques horaires (avec $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$) :

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = v_{0x} \cos(\omega_c t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + cste = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = v_{0x} \sin(\omega_c t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{v_{0x}}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + cste$$

$$y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)]$$

Ce qui donne pour l'équation cartésienne :

$$x^2 + \left(y - \frac{v_{0x}}{\omega_c}\right)^2 = \frac{v_{0x}^2}{\omega_c^2} [\cos^2(\omega_c t) + \sin^2(\omega_c t)] = \frac{v_{0x}^2}{\omega_c^2}$$

On reconnaît l'équation cartésienne d'un cercle centré en $\{0, \frac{v_{0x}}{\omega_c}\}$ et de

rayon $R_c = \frac{v_{0x}}{\omega_c}$

3. Dissipation d'énergie.

- (a) La puissance de la force de Lorentz a pour expression $P = q \vec{E} \cdot \vec{v}$; en utilisant par exemple l'expression du champ électrique créé par une charge ponctuelle, on sait, en terme de dimension, que la puissance prend la forme :

$$[P] = \left[\frac{e^2 v}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right]$$

L'idée est alors d'identifier une expression de cette forme dans la formule proposée, le reste devant nécessairement être adimensionné :

$$[P] = \left[\frac{e^2 c}{4\pi\epsilon_0 L^2} \times \frac{2}{3} \right] \times \left[e^{\alpha-2} c^{\beta-1} \times L^2 \times \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]$$

$$[P] = \left[\frac{e^2 c}{4\pi\epsilon_0 L^2} \times \frac{2}{3} \right] \times \left[e^{\alpha-2} \frac{L^{\beta-1}}{T^{\beta-1}} \times L^2 \times (L.T^{-2})^2 \right]$$

$$[P] = \left[\frac{e^2 c}{4\pi\epsilon_0 L^2} \times \frac{2}{3} \right] \times [e^{\alpha-2} \times L^{3+\beta} . T^{-3-\beta}]$$

Ceci impose nécessairement $\alpha = 2$ et $\beta = -3$.

- (b) En supposant que la dissipation d'énergie se fait sur une durée très grande devant la période de révolution de l'électron, on peut supposer le mouvement quasi-circulaire et appliquer la relation précédemment obtenue : $v_{0x} = R_c \omega$.

L'énergie de la particule s'identifie à son énergie cinétique :

$$E = \frac{1}{2} m v_{0x}^2 = \frac{1}{2} m \times R_c^2 \omega_c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{dE = m R_c \omega_c^2 dR_c}$$

L'application du théorème de l'énergie mécanique à l'électron conduit à :

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{P} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\|^2$$

La puissance rayonnée étant une correction apportée au mouvement circulaire, on peut au sein de son expression utiliser les formules du mouvement non perturbé et circulaire, en particulier :

$$\left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\| = \|\vec{a}\| = \frac{v_0^2}{R_c} = R_c \omega_c^2$$

En combinant les différentes relations, on en déduit :

$$m R_c \omega_c^2 \frac{dR_c}{dt} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2}{3} \times \frac{e^2}{c^3} \times R_c^2 \omega_c^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{dR_c}{dt} = -\frac{e^2 \omega_c^2}{6\pi\epsilon_0 \times mc^3} \times R_c \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dR_c}{dt} = -\frac{R_c}{\tau}}$$

Ce qui impose :

$$\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 \times mc^3}{e^2 \omega_c^2} = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 B}{e \omega_c^2} \times \frac{m}{eB} = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 B}{e \omega_c^2} \times \frac{1}{\omega_c} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 B}{e \omega_c^3}}$$

Application numérique :

$$\tau = \frac{6\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times (3 \times 10^8)^3 \times 0,2 \times 10^{-6}}{1,6 \times 10^{-19} \times (3,5 \times 10^4)^3} \simeq 1,3 \times 10^{14} \text{ s}$$

Le phénomène d'amortissement s'effectue à l'échelle de plusieurs millions d'année. Il est donc complètement négligeable pour le phénomène observé (période de rotation $T = 2\pi/\omega_c = 1,8 \times 10^{-4}$ s); on peut considérer la trajectoire comme parfaitement circulaire.

4. Le champ magnétique étant selon Oz , les mouvements dans le plan xOy et selon l'axe Oz sont découplés. Le mouvement résultant est la superposition des deux mouvements précédemment obtenu :

→ un mouvement circulaire dans le plan xOy de rayon $R_c = v_{0x}/\omega_c$;

→ un mouvement de translation uniforme à la vitesse v_{0z} sur Oz .

Il en résulte un **mouvement hélicoïdal** d'axe Oz qui s'appuie sur un cylindre de rayon R_c et de pas, distance verticale parcourue en une période de rotation, $h = v_{0z} \times \frac{2\pi}{\omega_c}$.

Seconde partie : mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et non uniforme

1. L'équation de Maxwell-Thomson assure que le champ magnétique est à flux conservatif; la formule de la divergence en cylindrique étant fournie, on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial [rB_r(r, z)]}{\partial r} + \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial [rB_r(r, z)]}{\partial r} = -r \frac{dB_z}{dz}$$

Ce qui donne par intégration :

$$rB_r(r, z) = -\frac{r^2}{2} \frac{dB_z}{dz} + A \quad \Leftrightarrow \quad B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} + \frac{A}{r}$$

La composante radiale du champ magnétique ne devant pas diverger le long de l'axe, on a nécessairement $A = 0$ et finalement :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$$

2. En ordre de grandeur, la relation précédente s'écrit :

$$B_r \simeq \frac{R_c}{2} \times \frac{B_z}{L}$$

La composante radiale B_r du champ magnétique peut être traitée comme une perturbation de la composante axiale B_z à condition que $R_c \ll L$.

3. Dans le cas de la trajectoire circulaire, $\omega_c = \frac{v_0}{R_c} = \frac{eB_z}{m}$.

En se plaçant dans le cas d'une perturbation, la relation précédente reste valable pour la vitesse orthoradiale :

$$mv_\theta = eBR(z)$$

4. Dans le cas d'une boucle de courant de rayon $R(z)$ orientée selon \vec{u}_z et parcouru par un courant d'intensité i :

$$\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2(z) \times i\vec{u}_z$$

Dans le cas présent, l'intensité est associée à un électron de charge $(-e)$ qui tourne en une durée $T_c = 2\pi/\omega_c$, c'est à dire pour l'intensité :

$$\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2(z) \times \frac{-e}{T_c} \vec{u}_z = -\frac{e\omega_c R^2(z)}{2} \vec{u}_z = -\frac{eR(z)v_\theta}{2} \vec{u}_z$$

D'autre part le moment cinétique de la particule en mouvement de rotation a pour expression :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = R(z)\vec{u}_r \wedge mv_\theta\vec{u}_\theta = mR(z)v_\theta\vec{u}_z$$

La comparaison des deux expressions conduit à la formule attendue :

$$\mathcal{M}_z = -\frac{e}{2m} \mathcal{L}_z$$

5. On applique le théorème du moment cinétique en projection selon l'axe Oz avec un champ magnétique essentiellement selon l'axe Oz

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z \simeq 0$$

Avec $\mathcal{M}_z = -\frac{e}{2m} \mathcal{L}_z$, on en déduit que \mathcal{M}_z est une constante du mouvement.