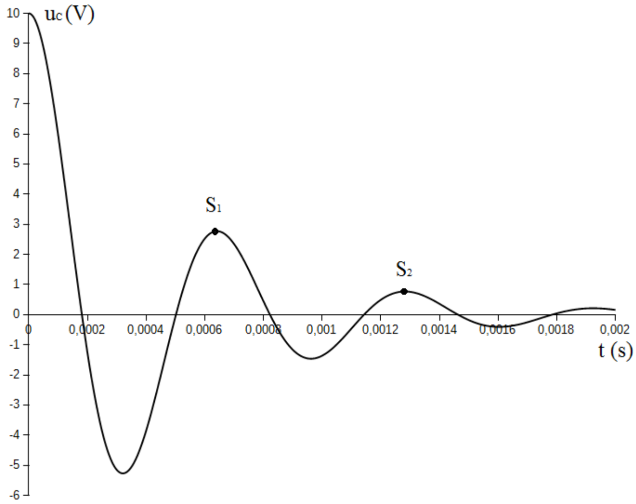
TD Signaux Physiques 09 : Régimes transitoires du second ordre

Exercice 1 – Régime transitoire d'un circuit RLC série



1. Charge du condensateur

Un générateur de tension continue E et de résistance interne R_g alimente un circuit RLC série constitué d'un condensateur de capacité C = 0,10 µF, d'une bobine réelle d'autoinductance L et de résistance r inconnues placés en série avec une résistance R = 480 Ω.

1.1 Réalisez un schéma du circuit électrique.

1.2 Précisez les valeurs de i, u_L, u_R et u_C lorsque le régime permanent est établi.

2. Décharge du condensateur

Une fois le régime permanent atteint, on remplace l'alimentation (E, R_g) par un fil. On étudie donc la décharge du condensateur de capacité C dans la bobine réelle d'autoinductance L et de résistance r inconnues placés en série avec une résistance R variable.

2.1 Établissez l'équation différentielle régissant l'évolution de $u_C(t)$ et mettez-la sous sa forme canonique, puis exprimez le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 en fonction des données du problème.

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

2.2 Rappelez les conditions de continuité liées au fonctionnement des bobines et des condensateurs. Déduisez-en les valeurs de u_C et de sa dérivée par rapport au temps à t = 0.

2.3 Comme le montre la figure ci-dessus, le régime est pseudopériodique. Établissez que ceci n'est possible que si la résistance R est inférieure à une valeur maximale R_{max} dont on donnera l'expression en fonction de L, r et C.

2.4 Montrez que la solution physique s'écrit sous la forme $u_C(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$. Précisez les expressions des constantes λ et ω en fonction de ω_0 et Q, ainsi que les valeurs des constantes A et B.

2.5 On donne les coordonnées des deux premiers maxima locaux pour t ≠ 0. Déduisez-en les valeurs expérimentales de la pseudopériode T et de la pseudopulsation ω.

	S_1	S_2
Tension	U_1 = 2,73 V	U_2 = 0,73 V
Date	t_1 = 0,65 ms	t_2 = 1,29 ms

3. Décrément logarithmique

Le décrément logarithmique de la tension u_C est défini par : $\delta = \ln\left(\frac{u_C(t)}{u_C(t+T)}\right)$

3.1 Montrez que $\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$. Déduisez-en l'expression de Q en fonction de δ.

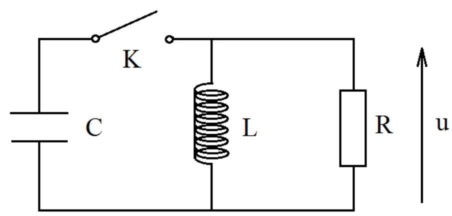
3.2 On donne δ = 1,28 et $\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 \approx 6$. Évaluez Q et ω_0.

3.3 À quelle condition peut-on approximer la période à la période propre ? Cette approximation est-elle vérifiée ?

3.4 Déterminez la valeur numérique de L.

Exercice 2 – Circuit bouchon

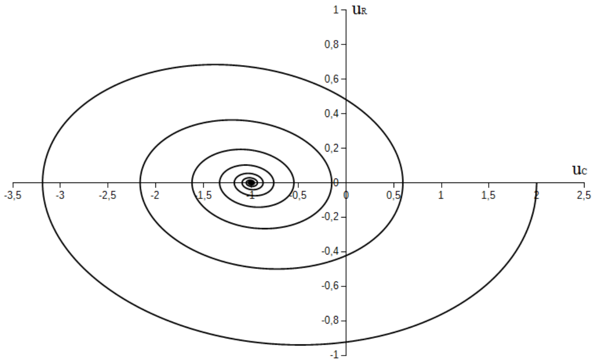
On considère le circuit suivant où C = 0,10 µF et L = 0,10 H. À t = 0, on ferme l'interrupteur K, le condensateur étant préalablement chargé.



1. Établissez l'équation différentielle satisfaite par la tension u.
2. La résistance R étant réglable, déterminez la valeur de R pour laquelle on observe un régime critique.
3. Pour quelles valeurs de R le régime est-il apériodique ?

Exercice 3 – Analyse d'un portrait de phase

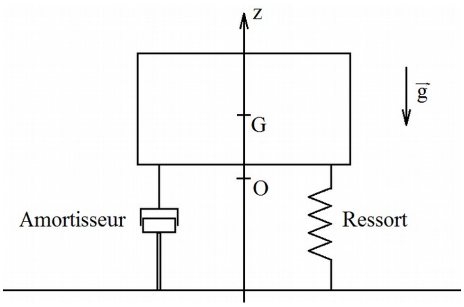
Lors de l'étude expérimentale d'un circuit RLC série, on trace la tension u_R aux bornes de la résistance en fonction de la tension u_C aux bornes de la capacité.



1. Justifiez que cette représentation peut être assimilée à un portrait de phase. Déterminez le type de régime observé.
2. L'étude du circuit a démarré à t = 0, lors de la fermeture d'un interrupteur. Établissez que $u_R(0) = 0$. Identifiez le point représentant l'état initial du système et déduisez-en les conditions initiales $u_R(0)$ et $u_C(0)$.
3. Identifiez le point représentant le régime permanent et définissez cet état. Tracez l'allure de $u_C(t)$.

Exercice 4 – Étude d'une suspension de voiture

On étudie le fonctionnement de la suspension d'une automobile en considérant le système S formé par le quart de la voiture de centre de masse G, de masse m = 300 kg. Le système S n'est pas couplé au reste du véhicule. Le point O fixe par rapport au sol correspond à la position de G lorsque le système est à l'équilibre par rapport à l'axe Oz. On note $\overrightarrow{OG} = z\,\vec{u_z}$ avec $\vec{u_z}$ le vecteur unitaire dirigeant l'axe Oz. Le système est relié au sol par un ressort de constante de raideur $k = 22\ \text{kN.m}^{-1}$ et est soumis de la part d'un amortisseur à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\mu\vec{v}$ avec le coefficient de frottement fluide $\mu = 800\ \text{kg.s}^{-1}$. La voiture roule sur une route horizontale à vitesse constante. À t = 0, la voiture rencontre une bosse, ce qui provoque son passage du point O à la position $z_0 = 5{,}0$ cm. La vitesse verticale est nulle à cet instant.



1. Fonctionnement des amortisseurs en régime pseudopériodique

1.1 Écrivez l'équation différentielle décrivant le mouvement vertical de G dans le référentiel lié au sol.

1.2 Montrez numériquement que le mouvement de G est pseudopériodique.

1.3 L'équation homogène admet des solutions de la forme : $z(t) = A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$. Exprimez α et ω en fonction des données du problème et calculez numériquement leurs valeurs.

1.4 Calculez la pseudopériode T du mouvement.

1.5 Exprimez A et tan(φ) en fonction de z_0, α et ω. Calculez les valeurs numériques de A et φ.

2. Fonctionnement des amortisseurs en régime critique

2.1 Une modification des amortisseurs a pour conséquence de faire fonctionner les amortisseurs en régime critique. Quelle est alors la relation entre m, k et μ ? Déduisez-en la nouvelle valeur de μ.

2.2 Déterminez l'expression de z(t) en fonction de z_0 et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Corrigés

Exercice 1

1. i = 0 ; $u_L = 0$; $u_R = 0$; $u_C = E$.
2. 2.1 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$; $Q = \dfrac{1}{(r+R)}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

   2.2 $u_C(0) = E$; i(0) = 0.

   2.3 $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} - r$

   2.5 T = 0,64 ms ; $\omega = 9{,}8.10^3\ \text{rad.s}^{-1}$
3. 3.2 Q = 2,5 ; $\omega_0 = 10.10^3\ \text{rad.s}^{-1}$

   3.4 L = 0,10 H

Exercice 2

1.
2. Q = 0,5 ...
3. Q < 0,5 ...

Exercice 3

1. Pseudo périodique.
2. $u_R(0) = 0$; $u_C(0) = 2$ V
3. $u_R(\infty) = 0$; $u_C(\infty) = -1$ V

Exercice 4

1. 1.3 $\alpha = 1{,}33\ \text{s}^{-1}$; $\omega = 8{,}46\ \text{rad.s}^{-1}$

   1.4 T = 0,74 s.

   1.5 A = 5,06 cm ; φ = -8,93°.
2. 2.1 $\mu = 5{,}14.10^3\ \text{kg.s}^{-1}$