

TD Thermodynamique 01 : Description macroscopique d'un système à l'équilibre

Exercice 1 – Équilibre d'un piston entre deux compartiments thermostatés

Un tube cylindrique horizontal d'axe Ox, de section droite S et de longueur 2a est séparé en 2 compartiments par un piston de masse m dont on repère la position par rapport au point O situé au centre du tube par son abscisse x. Chaque compartiment contient une quantité de matière n de gaz parfait maintenu en équilibre thermique à la température T constante. Le tube est fixe. À l'instant t = 0, le piston est en $x_0 \ll a$. R est la constante des gaz parfaits.

1. Réalisez un schéma du système lorsque le piston est à l'abscisse x. Exprimez en fonction de n, R, T, S, a et x les pressions dans le compartiment de gauche p_g et dans le compartiment de droite p_d .
2. Réalisez un bilan des forces s'exerçant sur le piston, puis déterminez l'équation différentielle dirigeant le mouvement du piston.
3. Dans l'hypothèse où $x \ll a$, montrez que le système se comporte comme un oscillateur harmonique. Déterminez la pulsation et la période propre des oscillations du piston autour de sa position d'équilibre.

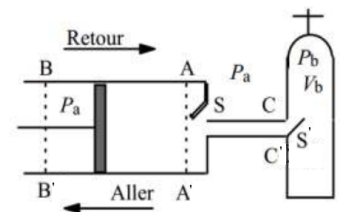
Exercice 2 – Bouteille de plongée

Afin d'effectuer le remplissage d'une bouteille de plongée à parois indéformables, de volume V_b , on utilise un compresseur composé d'un cylindre, de deux soupapes S et S' et d'un piston, mobile sans frottements entre les deux positions extrêmes AA' et BB'.

Lors de la phase d'aspiration, la soupape S est ouverte alors que S' est fermée. Il y a admission de l'air atmosphérique dans le cylindre à la pression P_{atm} .

Lors de la phase de compression, l'air dans le cylindre est comprimé de la pression P_{atm} à la pression P_b . La soupape S est fermée alors que la soupape S' s'ouvre dès que la pression dans le cylindre devient supérieure à la pression dans la bouteille P_b .

Quand le piston est en AA', le volume limité par le piston et la section CC' est V_{min} . Quand le piston est en BB', ce volume est égal à V_{max} . On suppose les transformations de l'air isothermes à la température atmosphérique T_a , et quasi statiques. L'air est considéré comme un gaz parfait.



1. Premier aller-retour du piston

La pompe n'ayant pas encore fonctionné, l'état initial du système est le suivant :

Bouteille : pression $P_b = P_{atm}$, température $T_b = T_a$; Cylindre : pression P_{atm} , température T_a , position du piston AA'.

- 1.1 Déterminez l'expression de la pression dans la bouteille après un aller-retour du piston, dans l'hypothèse où les volumes vérifient $V_{min} \ll V_b$.
- 1.2 Déduisez-en la variation Δn du nombre de moles de gaz contenues dans la bouteille.
- 1.3 Réalisez l'application numérique avec $V_b = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $V_{min} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$, $V_{max} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $T_a = 293 \text{ K}$ et la constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

2. Un aller-retour en cours de fonctionnement

Le compresseur ayant fonctionné, on considère qu'à un instant t donné, la soupape S est ouverte alors que la soupape S' est fermée. L'état du système est alors le suivant :

Bouteille : pression $P_b = p$, température $T_b = T_a$; Cylindre : pression P_{atm} , température T_a , position du piston AA'.

- 2.1 Déterminez le volume d'air V' dans le cylindre lorsque la soupape S' s'ouvre.
- 2.2 Déduisez-en la pression p' dans la bouteille à la fin de cette opération, puis la variation de pression Δp à l'intérieur de la bouteille.
- 2.3 Déterminez la pression p_{max} que l'on peut obtenir par ce procédé et interprétez le résultat obtenu.
- 2.4 Calculez Δp et p_{max} pour $p = 2 \text{ MPa}$.

3. Évolution de la pression au cours du temps

On considère qu'à l'instant t de la question précédente, l'état initial du système est identique. Le piston fait α allers-retours par seconde. La durée d'un aller-retour est donc $\Delta t = 1/\alpha$.

- 3.1 Établissez l'équation différentielle reliant p et dp/dt.
- 3.2 Le compresseur ayant démarré à t=0, déterminez la pression p à un instant t quelconque. Compte tenu de l'inégalité $V_{min} \ll V_b$, on pourra poser $\tau = V_b / (\alpha V_{min})$.
- 3.3 Pour quatre aller-retours par seconde, déterminez le temps T au bout duquel la pression dans la bouteille de plongée est de $p = 2 \text{ MPa}$.

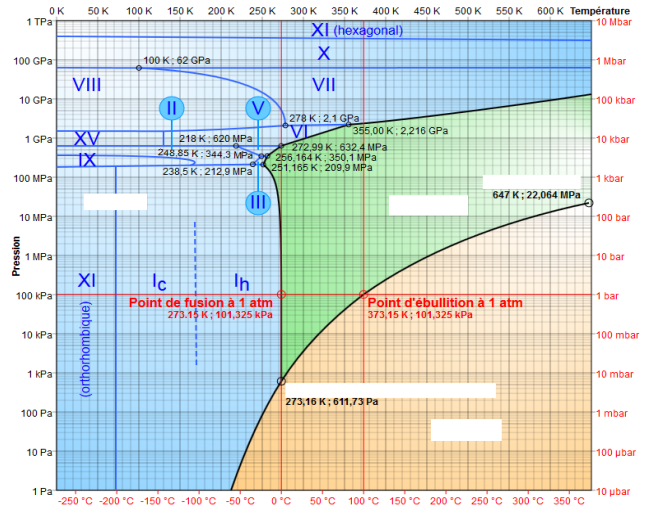
Exercice 3 – Équilibre diphasé dans une chaudière

On modélise une chaudière par un cylindre vertical de section S et de hauteur L contenant de l'eau de masse molaire M sous forme de vapeur et sous forme liquide supposée incompressible et indilatable, de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$. Initialement, l'ensemble est à l'équilibre à 100°C et le liquide atteint alors la hauteur h. On porte l'ensemble à la température 200°C et la hauteur du liquide baisse de x. On donne L = 1,0 m.

1. Diagramme de phases, diagramme de Clapeyron

1.1 Rappelez les noms de six transformations entre les différents états de la matière. Identifiez sur le diagramme de phases de l'eau les domaines d'existence de l'eau sous forme solide, liquide et sous forme de vapeur. À votre avis, à quoi correspondent les zones numérotées en chiffres romains ?

1.2 Définissez la pression de vapeur saturante et précisez de quels paramètres elle dépend. En vous intéressant plus particulièrement au passage du liquide à la vapeur, représentez le diagramme donnant la pression en fonction du volume pour la transformation correspondante en faisant figurer les courbes de rosée et d'ébullition et en précisant la nature des différents domaines.



2. Étude d'une chaudière

Pour $100^\circ\text{C} \leq T \leq 200^\circ\text{C}$, la pression de vapeur saturante de l'eau en bars est donnée par la formule empirique approximative de Duperray :

$$P_{\text{sat}} = \left(\frac{T(^{\circ}\text{C})}{100} \right)^4$$

2.1 Réalisez un schéma de la chaudière à 100°C et à 200°C. Calculez les pressions de vapeur saturante de l'eau à ces deux températures P_1 et P_2 .

2.2 Le niveau initial de liquide est $h = 10 \text{ cm}$. On porte la chaudière à la température de 200°C. En supposant qu'il reste du liquide, calculez la baisse x du niveau d'eau.

2.3 Déterminez complètement l'état final de l'eau lorsque le niveau initial de liquide est $h = 5,0 \text{ mm}$. Reste-t-il de l'eau à l'état liquide ? Commentez le résultat obtenu sachant que la pression maximale dans une chaudière du commerce est $P_{\text{max}} = 0,6 \text{ MPa}$.

Exercice 4 – Diagramme d'Amagat de la vapeur d'eau

On considère de la vapeur d'eau à 500 °C pour laquelle on effectue des mesures simultanées de pression P et de volume molaire V_m . Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

P (bar)	1,00	10,0	20,0	40,0	70,0	100
V_m (L.mol ⁻¹)	64,3	6,37	3,17	1,56	0,868	0,590

1. Tracez l'isotherme de l'eau à $T = 500^\circ\text{C}$ en coordonnées d'Amagat $PV_m = f(P)$. La vapeur d'eau peut-elle être considérée comme un gaz parfait ?

2. Aux faibles pressions, le modèle du gaz parfait peut être corrigé. On utilise alors l'équation de Van der Waals donnée ci dessous. Les données permettent-elles de valider ce modèle ?

$$PV_m = RT + (b - a/RT) P$$

3. Par d'autres mesures, on obtient $a = 0,923 \text{ J.m}^3.\text{mol}^{-2}$. Par une analyse dimensionnelle, montrez que b est homogène à un volume molaire que l'on appelle covolume. Le covolume correspond au volume occupé par les molécules d'une mole d'eau, ce qui rend ce volume inaccessible. Déterminez sa valeur compte tenu des données mesurées. On a la constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

4. En assimilant les molécules d'eau à des sphères de rayon r, estimez l'ordre de grandeur de la taille des molécules d'eau. Le nombre d'Avogadro est $N_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

TD Thermodynamique 01 : Description microscopique d'un système à l'équilibre

Exercice 5 – Densité particulière de l'eau

On donne la masse volumique de l'eau liquide $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, la masse molaire de l'eau $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, le nombre d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, la constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1. Calculez la densité particulière n^* de l'eau à l'état liquide.
2. Calculez la densité particulière n^* de l'eau à l'état de vapeur à $T = 400 \text{ K}$ sous une pression de 1,0 bar.

Exercice 6 – Vitesses de libération

On dispose des données suivantes :

Constante de gravitation universelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ USI}$

Constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Rayon de la Terre $r_T = 6400 \text{ km}$; Masse de la Terre $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

1. Déterminez la vitesse de libération v_1 d'une particule à la surface de la Terre.
2. Déterminez la vitesse quadratique moyenne pour le dihydrogène et le diazote de l'atmosphère terrestre. Commentez le résultat obtenu.
3. Quel devrait être l'ordre de grandeur de la température de l'atmosphère pour que le diazote échappe quantitativement à l'attraction terrestre ?

Exercice 7 – Effusion d'un gaz

On considère deux compartiments numérotés 1 et 2 de volumes V_1 et V_2 . L'ensemble est maintenu à la température T . Entre les deux compartiments, une petite ouverture de section s a été créée. Initialement, on a N_0 particules de gaz parfait dans le compartiment 1. On note N_1 et N_2 les nombres de particules dans les volumes V_1 et V_2 à l'instant t . On adopte le modèle dans lequel les particules ont toutes la même vitesse v , suivant l'une des six directions suivantes : \vec{u}_x , $-\vec{u}_x$, \vec{u}_y , $-\vec{u}_y$, \vec{u}_z , $-\vec{u}_z$.

1. Quel est le nombre de particules $dN_{1 \rightarrow 2}$ passant du compartiment 1 au compartiment 2 pendant l'intervalle de temps dt ? Faites de même pour les particules passant du compartiment 2 au compartiment 1.
2. Exprimez alors la variation élémentaire dN_1 du nombre de particules dans le compartiment 1.
3. Déduisez-en les équations différentielles vérifiées par N_1 et N_2 en fonction de s , v , V_1 et V_2 .
4. Établissez les expressions de N_1 et N_2 au cours du temps. Quel est le temps caractéristique de passage du gaz depuis le compartiment 1 jusqu'au compartiment 2 ?
5. Comment varie ce temps caractéristique en fonction de la masse molaire du gaz parfait considéré, si l'on admet que :

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

6. Quel peut être l'intérêt de cette différence de vitesse de remplissage ?

Corrigés

Exercice 1

1. $p_g = nRT/(a+x)$; $p_d = nRT/(a-x)$
2. $m \ddot{x} = (p_d - p_g)s$
3. $\ddot{x} + 2 \frac{nRT}{ma^2} x = 0$

Exercice 2

1. 1.1 $P_b = P_{atm}(1 + V_{max}/V_b)$
- 1.2 $\Delta n = P_{atm}(V_{max} - V_{min})/Rt_a$
- 1.3 $\Delta n = 0,08 \text{ mol}$
2. 2.1 $V' = P_{atm} V_{max}/p$
- 2.2 $p'(V_{min} + V_b) = pV_b + P_{atm} V_{max}$
 $\Delta p V_b = P_{atm} V_{max} - p V_{min}$
- 2.3 $p_{max} V_{min} = P_{atm} V_{max}$
- 2.4 $\Delta p = 3,9 \cdot 10^4 \text{ Pa}$
3. 3.1 $\frac{dp}{dt} + \alpha \frac{V_{min}}{V_b} p = \alpha \frac{V_{max}}{V_b} P_{atm}$
 $p(t) = P_{atm} \left(\left(1 - \frac{V_{max}}{V_{min}}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_{max}}{V_{min}} \right)$
- 3.3 $T = 42 \text{ s}$

Exercice 3

- 1.
2. 2.1 $P_1 = 1 \text{ bar}$; $P_2 = 2^4 \text{ bar}$
- 2.2 $x = 6,11 \text{ mm}$
- 2.3 Plus d'eau liquide,
 $P_f = 12,2 \text{ bar}$

Exercice 4

1. Pas de comportement de GP.
2. On obtient bien une droite.
3. Régression linéaire,
 $b = 9,09 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$
4. $r = 0,5 \text{ nm}$ environ

Exercice 5

1. $n^* = 3,3 \cdot 10^{28} \text{ particules} \cdot \text{m}^{-3}$
2. $n^* = 1,8 \cdot 10^{25} \text{ particules} \cdot \text{m}^{-3}$

Exercice 6

1. $v_1 = 11,2 \text{ km/s}$
2. $v_{qH_2} = 1,9 \text{ km/s}$
 $v_{qN_2} = 0,50 \text{ km/s}$
3. T_T de l'ordre de 10^5 K

Exercice 7

1. $dN_{1 \rightarrow 2} = N_1 v s dt / 6V$
 $dN_{2 \rightarrow 1} = N_2 v s dt / 6V$
2. $dN_1 = (N_2 - N_1) v s dt / 6V$
3. $\frac{dN_1}{dt} + \frac{vs}{3V} N_1 = N_0 \frac{vs}{6V}$
4. $\tau = 3V / vs$
5. $\tau = \frac{V}{s} \sqrt{3 \frac{M}{RT}}$
6. Effusion de temps caractéristique proportionnel à la racine carrée de la masse molaire.