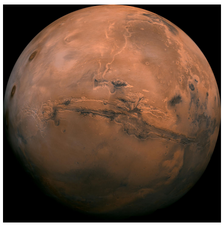
TD Mécanique 06 : Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

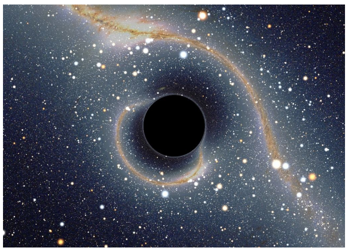
Exercice 1 – Période de révolution de Mars autour du Soleil



L'unité astronomique, notée ua est l'unité de longueur du système astronomique d'unités. Créée en 1958, elle est basée sur la distance Terre Soleil. Elle est définie depuis 2012 comme valant 149 597 870 700 m, soit la longueur d'un parcours durant 499 s de la lumière dans le vide. La distance moyenne Soleil Mars vaut environ 1,5 ua. Déterminez en années terrestres la période de révolution de Mars autour du Soleil.

Exercice 2 – Étude des trous noirs

En astrophysique, on appelle trou noir une distribution sphérique de matière dont la masse est telle que la vitesse de libération est supérieure à la vitesse de la lumière c.



1. Rayon de Schwarzchild

N'importe quel corps céleste de masse M peut se comporter comme un trou noir, à la condition que la totalité de sa masse M soit concentrée dans une sphère de rayon inférieur à son rayon de Schwarzchild R_S.

1.1 Donnez l'expression du rayon de Schwarzchild d'un astre de masse M.

1.2 Calculez les rayons de Schwarzchild de la Terre et du Soleil. Commentez les résultats obtenus.

2. Mesure des dimensions d'un trou noir

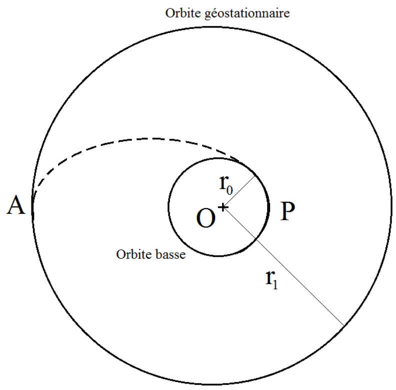
Le 25 mai 1994, les chercheurs de la NASA déclarent avoir mis en évidence au cœur de la galaxie M87, à 52 al de la Terre, un trou noir, en observant un tourbillon de gaz de 500 al de diamètre dont la vitesse de rotation atteint 1,9 millions de km/h.

2.1 Par quel procédé estime-t-on la vitesse de rotation d'un corps céleste ?

2.2 Proposez un modèle simplifié susceptible d'estimer la masse du trou noir détecté à partir des données expérimentales obtenues. On comparera la masse du trou noir à celle du Soleil, de masse $M_S = 1{,}99.10^{30}$ kg.

Exercice 3 – Changement d'orbite, ellipse de transfert

La Terre est supposée à symétrie sphérique de centre C, de rayon r_0 et de masse m_0. On donne la rayon $r_0 = 6400$ km, la masse de la Terre $m_0 = 5{,}98.10^{24}$ kg et la constante d'attraction universelle $G = 6{,}67.10^{-11}$ USI. On veut faire passer un satellite d'une orbite circulaire rasante de rayon $r_0 = CP$ à l'orbite géostationnaire de rayon $r_1 = CA$. Un moteur auxiliaire permet de modifier la vitesse du satellite aux points P et A. Le satellite parcourt alors entre les deux orbites une demi-ellipse, dite de transfert, de périgée P et d'apogée A.



1. Orbite géostationnaire

1.1 Un satellite de masse m décrit une orbite circulaire basse de rayon r_0 autour de la Terre. Quelles sont les expressions de la vitesse v_0 et de la période T_0 de révolution du satellite ? Calculez leurs valeurs numériques.

1.2 Un satellite géostationnaire décrit une orbite dans le plan de l'équateur et semble fixe pour un observateur terrestre. Déterminez le rayon r_1 de son orbite et calculez sa vitesse v_1. Calculez leurs valeurs numériques.

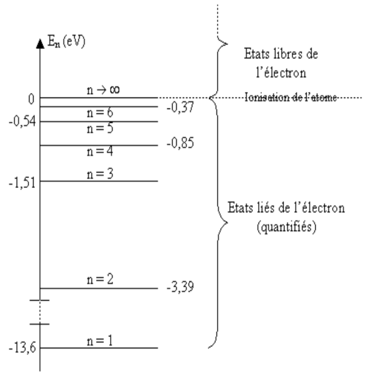
2. Orbite de transfert

2.1 Déterminez littéralement puis numériquement les vitesse v'_0 et v'_1 du satellite en P et A sur sa trajectoire elliptique.

2.2 Calculez la durée du transfert de P à A.

Exercice 4 – Modèle de Bohr

L'atome d'hydrogène H est constitué d'un proton autour duquel gravite un électron. On s'intéresse ici à l'interaction électrostatique entre l'électron et le proton de l'atome d'hydrogène. On se place dans le cadre du **modèle de Bohr** dans lequel l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon r autour du proton supposé fixe et centré en O.



1. Vitesse de l'électron

Faites un schéma de la situation. Exprimez et calculez la norme v de la vitesse de l'électron tournant autour du proton.

2. Moment cinétique et énergie mécanique de l'électron

2.1 Déterminez la norme du moment cinétique orbital L par rapport à O de l'électron en fonction de e, ε_0, r et m_e.

2.2 Démontrez que la force électrostatique s'exerçant entre le proton et l'électron dérive d'une énergie potentielle que vous exprimerez en fonction de e, ε_0 et r.

2.3 Exprimez alors l'énergie mécanique de l'électron en fonction de e, ε_0 et r.

3. Hypothèse de Bohr : quantification

L'hypothèse de Bohr consiste à supposer que le moment cinétique de l'électron par rapport au proton centré en O, $\vec{L}_0$ est quantifié et peut s'écrire sous la forme suivante, avec n un entier naturel positif et h = $6{,}62.10^{-34}$ J.s la constante de Planck :

$$\|\vec{L}_0\| = n\frac{h}{2\pi}$$

3.1 Montrez que le rayon des trajectoires est quantifié, et s'écrit sous la forme : $r^n = r_B\, n^2$, avec r_B le rayon de l'atome de Bohr que vous exprimerez et calculerez.

3.2 Montrez que l'énergie mécanique de l'électron est quantifiée, et peut s'exprimer sous la forme suivante, avec E_0 une énergie dont vous préciserez l'expression :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

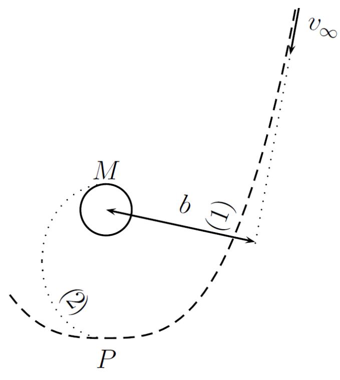
3.3 Que représente E_0 ? Que pouvez-vous dire des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène ? Calculez E_0 en électrons volts.

Données : $e = 1{,}60\,.\,10^{-19}\text{C}$ $\quad m_p = 1{,}67\,.\,10^{-27}\,\text{kg}$, $m_e = 9{,}11\,.\,10^{-31}\,\text{kg}$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\,\pi}.10^{-9}$ USI

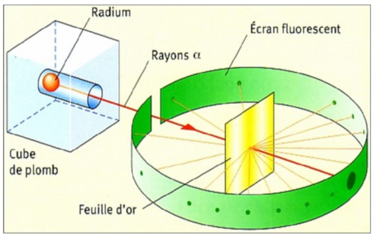
Exercice 5 – Mise en orbite d'un satellite

Un satellite de masse m a une trajectoire hyperbolique (1) de centre de force confondu avec la planète Mars, de masse M et de rayon R_M. Il arrive de l'infini avec une vitesse v_∞. Sa trajectoire est alors confondue avec l'asymptote de l'hyperbole. La distance entre le centre de force et son projeté orthogonal sur l'asymptote est notée b. La constante de gravitation universelle est notée G.

1. Exprimez en fonction des données les deux grandeurs qui se conservent au cours du mouvement du satellite sur sa trajectoire hyperbolique (1).
2. Exprimez la distance minimale d'approche d_m de la planète Mars en fonction des données lorsque le satellite se trouve au périgée P de sa trajectoire.
3. Au périgée de la trajectoire, on modifie brutalement la vitesse du satellite afin de le positionner sur une orbite elliptique (2). Cette trajectoire est la trajectoire limite permettant au satellite de rentrer en contact avec Mars. Déterminez la variation d'énergie cinétique que le satellite doit subir afin d'adopter la trajectoire (2).



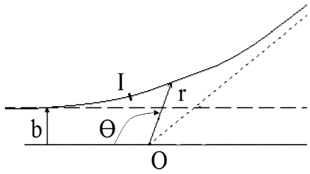
Exercice 6 – L'expérience de Rutherford, distance minimale d'approche



Sous la direction d'Ernest Rutherford, Hans Geiger et Ernest Marsden ont effectué en 1909 l'expérience suivante. Une source radioactive émet des particules α, c'est-à-dire des noyaux d'hélium . En effet, Rutherford a obtenu en 1908 le prix Nobel de chimie pour avoir identifié les particules α comme des atomes d'hélium (doublement ionisés, ce point ayant été précisé pendant son discours Nobel). Le faisceau de particules α est dirigé vers une mince feuille d'or (600 nm d'épaisseur). Ensuite, un écran recouvert de sulfure de zinc permet de visualiser par un scintillement les impacts des particules α. Dans l'obscurité, Geiger, Marsden et Rutherford observent à l'œil les scintillements… L'expérience montre que la majeure partie des particules α traverse la feuille d'or sans être déviée. Néanmoins, de manière inattendue, environ une particule α sur 8000 subit une déviation notable, allant quasiment jusqu'à faire un demi-tour. Afin d'illustrer son étonnement devant ces résultats, Rutherford a comparé ce résultat à un obus (la particule α de très grande vitesse) frappant une feuille de papier (la très mince couche d'or) et rebondissant dessus.

1. Approche corpusculaire

Un noyau d'hélium, aussi appelé particule α, de masse m et de charge q subit une force de répulsion électrostatique de la part d'un noyau d'or quasiment immobile de masse M et de charge Q centré au point O. Loin du point O, le noyau d'hélium a une vitesse $\vec{v}_0$. On souhaite déterminer la distance minimale d'approche r_m = OI en fonction de Z, e, v_0 et b, b étant appelé le paramètre d'impact. Données : $v_0 = 1{,}55.10^{7}$ m.s^{-1} ; $m_p = m_n = 1{,}67.10^{-27}$ kg ; $e = 1{,}60.10^{-19}$ C ; Or Z =79 ; Hélium Z = 2.



1.1 En utilisant un système de coordonnées adapté, exprimez le vecteur vitesse en I.
1.2 Quelles sont les grandeurs qui se conservent au cours du mouvement ?
1.3 À l'aide des lois de conservation, déterminez et calculez la distance minimale d'approche.
1.4 À quelle grandeur correspond la distance minimale d'approche ? Quel commentaire pouvez-vous faire sur la valeur obtenue ?

2. Approche ondulatoire

En augmentant la vitesse des particules α, il est possible de diminuer la distance minimale d'approche du noyau. Des choix d'énergies croissantes pour la particule incidente permettent donc de sonder le noyau à des échelles spatiales de plus en plus faibles. Des énergies plus importantes permettent de casser le noyau et de faire apparaître sa structure comme assemblage de protons et neutrons. Des énergies encore plus importantes permettent de sonder la nature même des protons et des neutrons, et de les décrire comme des états liés de quarks.

2.1 La particule α étant une particule quantique, elle se comporte comme une onde, selon le principe de dualité onde-corpuscule. Exprimez et calculez la longueur d'onde de De Broglie associée à cette particule.
2.2 Pourquoi cette longueur d'onde nous permet-elle d'étudier le noyau de l'atome d'or ?
2.3 Pourquoi faut-il augmenter l'énergie de la particule si l'on veut sonder des détails plus fins du noyau ?