

## TD Mécanique 03 : Approche énergétique du mouvement

### Exercice 1 – Étude énergétique d'un pendule simple

Une masse  $m = 200 \text{ g}$  est attachée à l'extrémité d'un pendule simple de longueur  $l = 1,00 \text{ m}$ . Le fil est écarté d'un angle  $\theta_0$  égal à  $30^\circ$  par rapport à la verticale et l'objet est lâché sans vitesse initiale. On prend  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ . En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminez la vitesse  $v_1$  de la masse à la verticale.

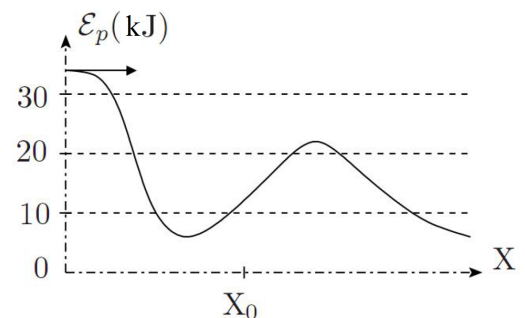
### Exercice 2 – Distance de freinage

À l'aide d'une approche énergétique, déterminez la distance de freinage d'un véhicule de 1,3 tonnes roulant à 100 km/h. La force de freinage est constante et égale à  $5,0 \cdot 10^3 \text{ N}$ .

### Exercice 3 – Montagnes russes

Un chariot de montagnes russes est assujéti à se déplacer sans frottements le long de rails tels qu'il est soumis au profil d'énergie potentielle représenté ci-contre. On repère la position du wagon le long des rails par son abscisse  $X$ .

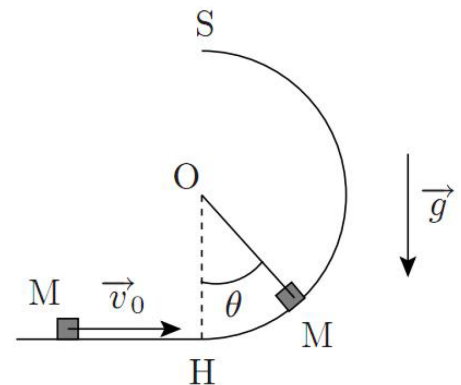
1. Identifiez graphiquement les positions graphiques en précisant leur caractère stable ou instable.
2. À l'instant initial, le wagon se trouve en  $X_0$  avec l'énergie mécanique  $E_m = 20 \text{ kJ}$ . Indiquez sur le graphe le domaine de variation possible de position du point matériel.



### Exercice 4 – Looping

Un palet lancé à la vitesse  $v_0$  glisse sans frottements sur une piste horizontale avant d'aborder une portion de cercle comme indiqué sur le schéma. Sur la portion circulaire, la position du mobile est repérée par l'angle  $\theta$ .

1. Que pouvez-vous dire de vitesse sur la portion horizontale ?
2. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, exprimez la norme de la vitesse  $v$  du mobile lorsqu'il est situé sur la portion de cercle en fonction de  $v_0$ ,  $g$   $R$  et  $\theta$ .
3. Par projection du PFD, déterminez la composante normale  $N_r(\theta)$  de la force de contact exercée par la piste sur le mobile.
4. Quelle condition doit vérifier  $v_0$  pour que le mobile atteigne le sommet  $S$  sans que le contact avec la piste ne soit rompu ?



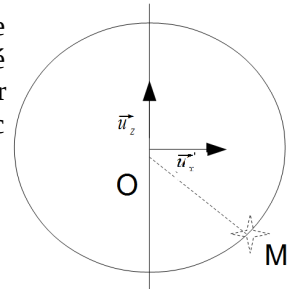
### Exercice 5 – Oscillations verticales d'un pendule élastique

On considère une masse  $m$  suspendue à un ressort vertical idéal, de masse négligeable et de constante de raideur  $k$ . L'extrémité du ressort est fixée au point  $O$ . On utilise l'axe  $(Oz)$  vertical dirigé vers le bas pour repérer la position de l'extrémité libre du ressort par son abscisse  $z$ . Soit  $l_0$  la longueur à vide du ressort, et  $z_{eq}$  sa longueur lorsque la masse  $m$  est à l'équilibre dans le champ de pesanteur terrestre. On négligera les frottements.

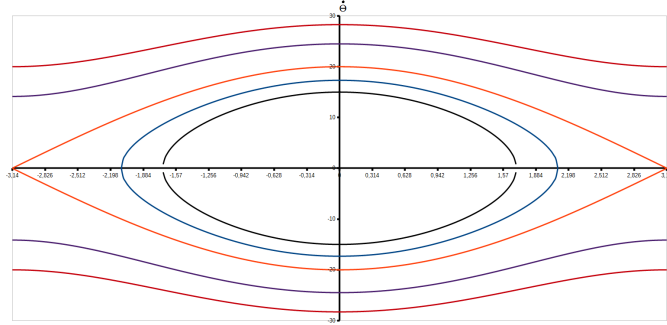
1. Établissez à l'aide d'un raisonnement énergétique l'équation différentielle du mouvement.
2. Résolvez cette équation, en faisant apparaître la pulsation propre  $\omega_0$  du système, sachant que le ressort est lâché sans vitesse initiale depuis le point de cote  $z_0$ .
3. Dans la suite de l'étude, on prend en compte les frottements s'exerçant sur la masse, sous la forme d'une force de frottements fluides, de la forme  $\vec{F}_{fr} = -\alpha \vec{v}$ . On met en place un dispositif tel que l'équation horaire du mouvement reste  $z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) + z_{eq}$ , malgré les frottements. Déterminez en fonction de  $A$ ,  $\alpha$  et  $\omega_0$  le travail de la force de frottements sur une période d'oscillation de la masse.

### Exercice 6 – Mouvement d'un point matériel sur une circonférence

Soit un point M de masse m pouvant glisser sans frottements sur un cerceau de centre O et de rayon r placé dans un plan vertical. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen. Le repère lié à ce référentiel est  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . M est un anneau qui peut coulisser sur la circonférence grâce à une liaison bilatérale. À  $t = 0$ , il est lancé depuis le point A  $(0,0,-r)$  avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_\theta$ .

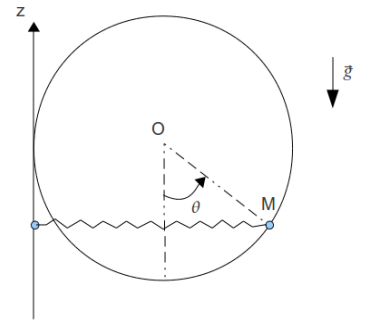


1. Quelle est l'expression du module  $v$  de la vitesse de M ?
2. Discutez la nature du mouvement en fonction des valeurs de  $v_0$ .
3. On fournit les trajectoires de phase du système pour différentes conditions initiales. Précisez les trajectoires de phase pour lesquelles le mouvement est révolutif et celles pour lesquelles le mouvement est oscillant. Pour quelles conditions initiales observe-t-on une bifurcation ?



### Exercice 7 – Équilibre et stabilité

Un point matériel M de masse m glisse sans frottements sur un cerceau vertical de rayon R. Le point M est fixé à un ressort dont l'autre extrémité glisse sans frottements sur un axe vertical tangent au cerceau, de sorte que le ressort reste horizontal. On note  $\theta$  l'angle que fait (OM) avec la verticale, k la constante de raideur du ressort, et  $\ell_0$  sa longueur à vide. La longueur à vide du ressort est égale au rayon R du cerceau  $\ell_0 = R$ .



1. Montrez que le problème est conservatif.
2. Exprimez l'énergie potentielle du point M en fonction des données du problème.
3. On pose  $\alpha = mg/kR$ . Montrez que le système possède des positions d'équilibre telles que : 2 existent toujours et 2 n'existent qu'à une condition qu'il faudra préciser.
4. Pour de petites oscillations autour de la position d'équilibre stable, déterminez l'équation différentielle du mouvement, puis déduisez-en la période du mouvement.

Pour de petits angles,  $\sin \theta \approx \theta$  et  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ .