TD Mécanique 01 : Cinématique

Exercice 1 – Éléments de cinématique

1. Cinématique en coordonnées cartésiennes

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes sont, à chaque instant :

$$x(t) = a_0\, t^2 + x_0,\ y(t) = -v_0\, t \text{ et } z(t) = z_0$$

$$x_0 = 1{,}0 \text{ m},\ z_0 = -1{,}0 \text{ m},\ a_0 = 2{,}0 \text{ m.s}^{-2} \text{ et } v_0 = 3{,}0 \text{ m.s}^{-1}$$

1.1 Déterminez les composantes des vecteurs vitesse et accélération du point M dans la base cartésienne choisie.
1.2 Calculez la norme de la vitesse de M à la date t = 2 s.
1.3 Calculez la norme de l'accélération de M à la date t = 1 s.

2. Cinématique en coordonnées cylindriques

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant :

$$r(t) = a_0\, t^2 + r_0,\ \theta(t) = \omega_0\, t - \theta_0 \text{ et } z(t) = -v_0\, t$$

$$r_0 = 1{,}0 \text{ m},\ a_0 = 1{,}0 \text{ m.s}^{-2},\ \omega_0 = 3{,}0 \text{ rad.s}^{-1},\ \theta_0 = 2{,}0 \text{ rad et } v_0 = 2{,}0 \text{ m.s}^{-1}$$

2.1 Déterminez les composantes des vecteurs vitesse et accélération du point M dans la base cylindrique choisie.
2.2 Calculez la norme de la vitesse de M à la date t = 1 s.
2.3 Calculez la norme de l'accélération de M à la date t = 0 s.

3. Analyse d'équations horaires

On donne les équations horaires de différents types de mouvements dans le plan (Oxy), en coordonnées cartésiennes ou cylindriques. a, b, c, d et e sont des constantes. Indiquez dans chaque cas les caractéristiques du mouvement du point M étudié. Tracez l'allure de la trajectoire de M.

3.1 $x(t) = a\, t^2 - b\, t + c$; $y(t) = 2\, c$.
3.2 $r(t) = 2\, c$; $\theta(t) = d\, t + e$.
3.3 $r(t) = b\, t + c$; $\theta(t) = 2\, e$.

Exercice 2 – Freinage d'urgence

Une voiture, animée d'une vitesse égale à 90 km/h suit une trajectoire rectiligne. Après un temps de réaction de l'ordre de 0,5 secondes, son conducteur freine brusquement. La voiture a alors une accélération constante de norme 4,2 m.s^{-2}.
Calculez la durée et la distance de freinage de la voiture. Calculez la distance d'arrêt de la voiture, c'est-à-dire la distance entre le moment où le conducteur perçoit le danger, et le moment où la voiture est à l'arrêt.

Exercice 3 – Accélération ressentie lors d'un freinage

Combien de « g » ressent un conducteur qui freine sur une distance de 10 mètres alors qu'il roulait à 50 km/h ?

Exercice 4 – Trajectoire d'une particule dans une chambre à bulles

Lors de l'étude de collisions entre particules, il était fréquent au milieu du XX^{e} siècle d'utiliser des chambres à bulles, inventées par Donald A.Glaser en 1952. Les particules issues de collisions formaient au sein d'un liquide préparé spécifiquement des bulles lors de leur passage, ce qui permettait de visualiser leurs trajectoires. Ici, une particule est décrite par un point M dont la trajectoire dans le plan (Oxy) est décrite par les équations horaires suivantes :

$$r(t) = r_0\, e^{\frac{-t}{\tau}} \quad \text{et} \quad \theta(t) = \omega\, t$$

1. Allure de la trajectoire

1.1 Tracez l'allure de la trajectoire $r(\theta)$. Vous pourrez choisir les valeurs des constantes suivantes : $r_0 = 5{,}0$ m, $\tau = 5{,}0$ s et $\omega = 1{,}0 \text{ rad.s}^{-1}$ et déterminer les valeurs de r pour $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$...
1.2 Justifiez que l'on appelle cette trajectoire une spirale logarithmique.

2. Vecteurs vitesse et accélération

2.1 Après avoir calculé $\dot{r}(t)$ et $\dot{\theta}(t)$, déterminez les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
2.2 Montrez que le vecteur vitesse $\vec{v}$ forme à tout instant un angle α constant avec le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Vous pourrez vous aider de deux expressions différentes du produit scalaire $\vec{v} \cdot \overrightarrow{OM}$.

Exercice 5 – Météorite pénétrant dans l'atmosphère terrestre

Une météorite animée d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ constante pénètre dans un milieu résistant, l'atmosphère terrestre, dans laquelle elle est soumise à une force de frottement fluide qui se traduit par une accélération $\vec{a} = -k v^2 \vec{u}_x$, k désignant une constante positive et v la vitesse instantanée de la météorite.

1. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v.
2. Montrez que v s'exprime sous la forme suivante en prenant comme origine des temps l'entrée de l'astéroïde dans l'atmosphère.

$$v(t) = \frac{v_0}{1+v_0 k t}$$

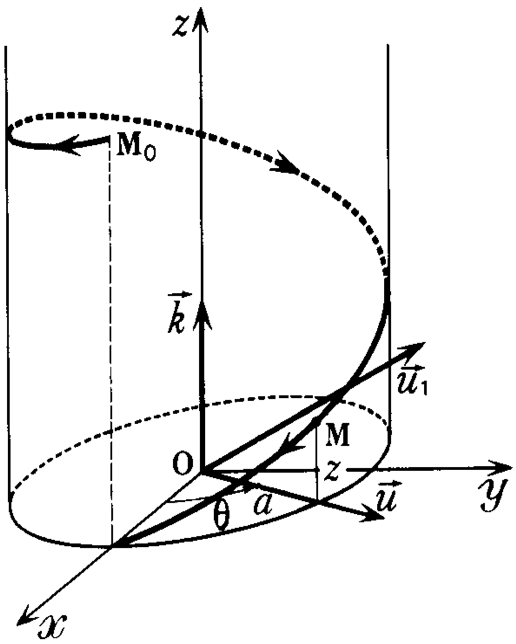
3. Déterminez l'équation horaire x(t), l'origine des positions étant prise à l'entrée de la météorite dans l'atmosphère.

Exercice 6 – Le phare d'Eckmühl

Tous les ans a lieu à Penmarc'h la course du phare d'Eckmühl, au cours de laquelle les concurrents doivent monter le plus vite possible en haut du phare. Un coureur décrit par un point matériel M suit après sa course, lors de la fin de la descente du phare, une hélice circulaire autour d'un axe Oz en partant de M_0.

Les équations décrivant ce mouvement sont les suivantes, avec a le rayon du cylindre sur lequel est tracée l'hélice, h une constante appelée pas réduit de l'hélice et θ l'angle entre l'axe Ox et le vecteur $\vec{u}$.

$$x = a \cos\theta$$
$$y = a \sin\theta$$
$$z = h\theta$$



1. Donnez en coordonnées cylindriques les expressions de la vitesse et de l'accélération du coureur descendant du phare.
2. Montrez que le vecteur vitesse forme avec le plan (Oxy) un angle α constant.
3. Montrez que dans le cas où la valeur de la vitesse du coureur est constante, le vecteur accélération passe par l'axe du cylindre et est parallèle au plan (Oxy). Le vecteur $\vec{a}$ est-il un vecteur constant ?

Corrigés

Exercice 1

1. 1.2 v = 8,5 m.s^{-1}
   1.3 a = 4 m.s^{-1}
2. 2.2 v = 6,5 m.s^{-1}
   2.3 a = 7 m.s^{-1}
3. 3.1 Rectiligne uniformément accéléré.
   3.2 Circulaire uniforme.
   3.3 Rectiligne uniforme.

Exercice 2

t_f = 6,0 s ; d_f = 74 m ; d_a = 87 m

Exercice 3

Un peu plus d'un « g ».

Exercice 4

1. Tracé de spirale.
2. $\vec{v} = -\frac{r}{\tau}\vec{u}_r + r\omega\vec{u}_\theta$

   $\vec{a} = \left(\frac{r}{\tau^2} - r\omega^2\right)\vec{u}_r - 2r\frac{\omega}{\tau}\vec{u}_\theta$
3. $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$

Exercice 5

1. $\frac{dv}{dt} = -k v^2$
2. Séparation des variables.
3. $x(t) = \frac{1}{k}\ln(1+v_0 k t)$

Exercice 6

1. Passage cartésien cylindrique.
2. $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{a}\right)$
3. $\vec{a} = -2a\dot{\theta}\vec{u}$ non constant.