Exercice 1 - Éléments de cinématique

1. Cinématique en coordonnées cartésiennes

1.1. $\begin{cases} v_x = \dot{x} = 2a_0 t \\ v_y = \dot{y} = -v_0 \\ v_z = \dot{z} = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = 2a_0 \\ a_y = \dot{v}_y = 0 \\ a_z = \dot{v}_z = 0 \end{cases}$

1.2. $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$ $\quad$ AN $\|\vec{v}\| = 8,5\ m.s^{-1}$

1.3. $\boxed{\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$ $\quad$ AN $\|\vec{a}\| = 4,0\ m.s^{-1}$

2. Cinématique en coordonnées cylindriques

2.1 * $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 t^2 + r_0 \\ 0 \\ -v_0 t \end{pmatrix} = (a_0 t^2 + r_0)\,\overrightarrow{u_r} - v_0 t\,\overrightarrow{u_z}$

* $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z} = 2a_0 t\,\overrightarrow{u_r} + (a_0 t^2 + r_0)\omega_0\,\overrightarrow{u_\theta} - v_0\,\overrightarrow{u_z}$

* $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$

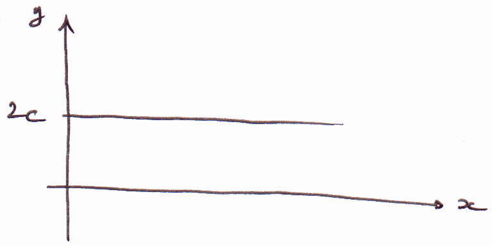
$\vec{a} = (2a_0 - (a_0 t^2 + r_0)\omega_0^2)\,\overrightarrow{u_r} + 4a_0 t\omega_0\,\overrightarrow{u_\theta}$

2.2. $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2}}$ $\quad$ AN $\|\vec{v}\| = 6,5\ m.s^{-1}$

2.3. $\boxed{\|\vec{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}}$ $\quad$ AN $\|\vec{a}\| = 7,0\ m.s^{-2}$

3. Analyse d'équations horaires

3.1

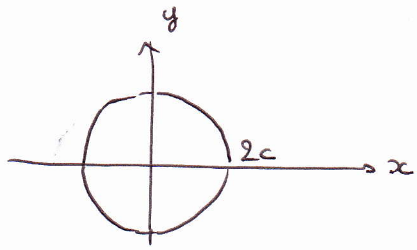


$\vec{v} = (2at - b)\,\overrightarrow{u_x}$

$\vec{a} = 2a\,\overrightarrow{u_x}$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré.

3.2.

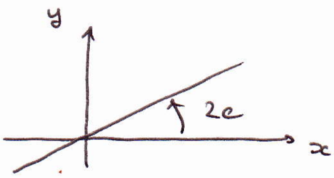


$\overrightarrow{OM} = 2c\,\overrightarrow{u_r}$

$\vec{v} = 2cd\,\overrightarrow{u_\theta}$

Mouvement circulaire uniforme

3.3.



$\overrightarrow{OM} = (bt + c)\,\overrightarrow{u_x}$

$\vec{v} = b\,\overrightarrow{u_r}$

$\vec{a} = \vec{0}$

Mouvement rectiligne uniforme

Exercice 2 - Freinage d'urgence

* Système : Voiture assimilée à un point matériel M de masse m.
* Référentiel : Terrestre supposé galiléen. A $t=0$, le conducteur freine.

$\vec{a} = -a_0 \vec{u_x}$ avec $a_0 = 4,2 \, m.s^{-2}$

$\vec{v} = (-a_0 t + v_0) \vec{u_x}$ avec $v_0 = 90 \, km/h$

$\vec{OM} = \left(-\frac{a_0 t^2}{2} + v_0 t\right) \vec{u_x}$

- Durée de freinage $v = 0 \Leftrightarrow -a_0 t_F + v_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_F = \frac{v_0}{a_0}}$ AN $t_F = 6,0 \, s$
- Distance de freinage $d_F = -\frac{a_0 t_F^2}{2} + v_0 t_F \Leftrightarrow \boxed{d_F = \frac{v_0^2}{2a_0}}$ AN $d_F = 74 \, m$
- Distance d'arrêt. Avant de commencer à freiner, le conducteur parcourt la distance $d_r = v_0 t_r$ avec t_r le temps de réaction

$$\boxed{d_a = d_r + d_F = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a_0}}$$ AN $d_a = 87 \, m$

Exercice 3 - Accélération ressentie lors d'un freinage

* En reprenant les résultats de l'exercice précédent,

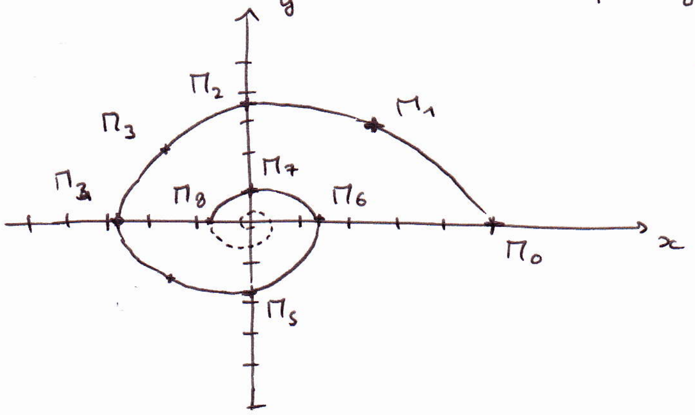
$d_F = \frac{v_0^2}{2a_0} \Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{v_0^2}{2d_F}}$ AN $a_0 = 9,6 \, m.s^{-2}$

Exercice 4 - Trajectoire d'une particule dans une chambre à bulles

1. Allure de la trajectoire

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
r	5,0	4,3	3,7		2,7	1,9	1,4	1,0	0,76
	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8

$$r(\theta) = r_0 e^{-\theta/\omega\tau}$$



1.2. La trajectoire a l'allure d'une spirale dont le rayon décroît exponentiellement avec le temps, d'où son nom de spirale logarithmique

2. Vecteurs vitesse et accélération

2.1 $\boxed{\dot{r} = -\frac{r_0}{\tau} e^{-t/\tau} = -\frac{r}{\tau}}$ $\boxed{\dot{\theta} = \omega}$

- $\boxed{\vec{v} = -\frac{r}{\tau}\,\vec{u_r} + r\omega\,\vec{u_\theta}}$

- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u_\theta}$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\frac{r}{\tau^2} - r\omega^2\right)\vec{u_r} - 2\frac{r\omega}{\tau}\,\vec{u_\theta}}$$

2.2. $\begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{OM} = \vec{v}\cdot\vec{r} = r v_r = -\frac{r^2}{\tau} \\ \vec{v}\cdot\vec{r} = v r\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{r^2}{\tau^2} + r^2\omega^2}\; r\cos(\alpha) \end{cases}$ Calcul du produit scalaire

$\Rightarrow \cos(\alpha) = \dfrac{-1}{\tau\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}}$

Exercice 5 – Météorite pénétrant dans l'atmosphère terrestre

1. $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -k\,v^2\,\vec{u_x}$

Le mouvement de la météorite étant rectiligne le long de l'axe Ox, on obtient :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + k v^2 = 0}$$

2. * Séparation des variables

$$\frac{dv}{v^2} = -k\,dt \iff \int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v'^2} = \int_0^t -k\,dt'$$

$$\iff -\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v_0} = -kt$$

$$\iff \frac{1}{v(t)} = \frac{1}{v_0} + kt$$

$$\iff \boxed{v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 k t}}$$

3. $v = \dfrac{dx}{dt} \iff x(t) = \displaystyle\int_0^t v(t')\,dt' = \int_0^t \frac{v_0}{1+v_0 k t'}\,dt'$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{k}\ln(1 + v_0 k t)}$$

Exercice 6 - Le phare d'Eckmühl

1.
$$\begin{cases} x = a\cos(\theta) \\ y = a\sin(\theta) \\ z = h\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} = a \\ z = h\theta \end{cases}$$

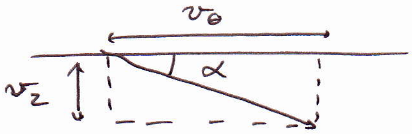
Cartésiennes — Cylindriques

$$\vec{r} = a\vec{u_r} + h\theta\vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{u_\theta} + h\dot{\theta}\vec{u_z}}$$

$$\boxed{\vec{a} = -2a\dot{\theta}^2\vec{u_r} + a\ddot{\theta}\vec{u_\theta} + h\ddot{\theta}\vec{u_z}}$$

2.



$$\tan(\alpha) = \frac{v_z}{v_\theta} = \frac{h}{a} \iff \boxed{\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{h}{a}\right)}$$

3. * v est constante $\iff \ddot{\theta} = 0$ car $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+h^2}\,\dot{\theta}$

$$\iff \boxed{\vec{a} = -2a\dot{\theta}^2\vec{u_r}}$$

Le vecteur accélération est orienté selon $-\vec{u_r}$ dans le cas où la vitesse est constante. Le vecteur $\vec{u_r}$ n'étant pas constant, $\vec{a}$ n'est pas un vecteur constant.