Devoir surveillé n°07 (correction)

1 Thermodynamique

1.1 Cours

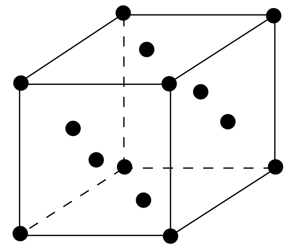
1. La vitesse quadratique moyenne a pour expression $v^\star = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\dfrac{3k_BT}{m}}$ avec T la température et m la masse de la particule :
$$v^\star_{O_2} = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 298}{2 \times 16/(6,02 \times 10^{23}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^\star_{O_2} = 4,8 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1}}$$
2. Lors de l'évolution adiabatique d'un système fermé :
   — l'énergie interne reste toujours constante : **Faux** ; un travail peut contribuer à modifier l'énergie interne ;
   — le transfert thermique est toujours nul : **Vrai** ; c'est la définition d'une évolution adiabatique ;
   — la température reste toujours constante : **Faux** ; lors de la compression adiabatique d'un gaz, le gaz reçoit de l'énergie sous forme d'un travail ce qui contribue à augmenter son énergie interne et donc sa température.

1.2 Évaporation de l'eau

1. La définition du degré d'hygrométrie donne : $P_{H_2O} = H \times P_{sat}$
   Pour la vapeur eau assimilée à un gaz parfait : $P_{H_2O} = \dfrac{n_{H_2O}RT}{V}$, on en déduit :
$$H \times P_{sat} = \frac{n_{H_2O}RT_0}{V} \quad \Rightarrow \quad n_{H_2O} = \frac{HP_{sat}V}{RT} = \frac{0,60 \times 2,3 \times 10^3 \times 40}{8,31 \times 293}$$
   $\boxed{n_{H_2O} \simeq 23 \text{ mol}}$.
2. 200 mL d'eau correspondent à 11,1 mol d'eau ; si toute l'eau s'évapore on obtient environ 34 mol d'eau dans l'air ce qui correspond à une pression partielle :
$$P_{H_2O} = \frac{n_{H_2O}RT_0}{V} = \frac{34 \times 8,31 \times 293}{40} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{H_20} = 2,1 \text{ kPa}}$$
   $P_{H_2O} < P_{sat}$, tout le liquide s'évapore. Le degré d'hygrométrie vaut alors :
$$H = \frac{P_{H_20}}{P_{sat}} = \frac{2,1}{2,3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = 91\%}$$

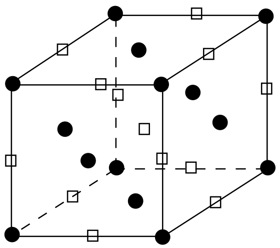
2 A propos du Nickel (agrégation 2011, E3A PSI 2011)

1. Les entités nickel sont disposées aux sommets du cube et aux centres des faces :



2. Il y a 4 atomes de nickel en propre dans la maille ($4 = 8 \times (1/8) + 6 \times (1/2)$). La périodicité du cristal assure que la masse volumique de la maille est celle du cristal, en conséquence :
$$\rho_{Ni} = \frac{4M_{Ni}}{\mathcal{N}_A a^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \left(\frac{4M_{Ni}}{\mathcal{N}_a \rho_{Ni}}\right)^{1/3}}$$
   La tangence se fait selon la diagonale de face : $\boxed{4r_{Ni} = a\sqrt{2}}$.

   Application numérique :
$$a = \left(\frac{4 \times 58,7 \times 10^{-3}}{6,02 \times 10^{23} \times 8902}\right)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 364 \text{ pm}}$$
$$r_{Ni} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_{Ni} = 129 \text{ pm}}$$
3. La compacité est le rapport du volume occupé par le volume de la maille :
$$C = \frac{4 \times 4\pi r_{Ni}^3/3}{a^3} = \frac{4 \times 4\pi r_{Ni}^3/3 \times 2\sqrt{2}}{4^3 \times r_{Ni}^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} = 74\%}$$
   La compacité est celle d'une **structure compacte**.
4. Une entité nickel possède 12 plus proches voisins (structure compacte).
5. Le nickel est un cristal métallique, chacune des entités nickel cède un électron au réseau. La bonne conductivité du nickel s'explique par la présence d'un grand nombre de porteurs de charge libres.
6. Les centres des sites octaédriques se situent au centre du cube (en propre dans la maille) et sur chacune des douze arêtes du cube (partagée sur 4 mailles) soit un total de **4 sites octaédriques** ($4 = 1 + 12 \times (1/4)$).



Le rayon maximal de l'impureté se détermine en considérant la place disponible le long d'une arête :

$$2R_M + 2r_{Ni} = a = 2\sqrt{2}r_{Ni} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{R_M = r_{Ni}\left(\sqrt{2}-1\right) = 53,4 \text{ pm}}$$

7. Le rayon de l'atome de fer est supérieur au rayon maximal de l'impureté pour un site octaédrique. Les sites tétraédriques offrant moins de place que les sites octaédriques, un atome de fer ne peut s'insérer dans les sites vacants de la structure du nickel. **Il s'agit donc d'un alliage de substitution** (confirmé par la valeur voisine des rayons atomiques du nickel et du fer).

3 Étude d'un satellite de télédétection (ATS 2014)

3.1 Préliminaires

1. Cf. cours : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r}$ et $\boxed{\vec{v}_M = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$.

2. Connaissant l'énergie potentielle, on en déduit la force :

$$\vec{F} = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -g_0 m\frac{R_T^2}{r^2}}\vec{u}_r$$

La force gravitationnelle est une force attractive.

3. $\vec{L}_o$ représente le moment cinétique du satellite par rapport à O.
Pour le mouvement plan considéré :

$$\vec{L}_o = mr\vec{u}_r \wedge \left(\dot{r}\vec{u}r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_o = mr^2\dot{\theta}\vec{k}}$$

Dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, on applique le théorème du moment cinétique au satellite :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}_{\overrightarrow{OM}//\vec{F}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_o = \overrightarrow{cste}}$$

3.2 Mise en orbite circulaire du satellite

4. La conservation du moment cinétique impose $r^2\dot{\theta} = cste$; de plus pour un mouvement circulaire $r = cste'$. L'association de ces deux conditions assure que la vitesse angulaire est constante et **le mouvement est donc uniforme**.

5. Dans le référentiel géocentrique galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique au satellite soumis à la force centrale :

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad -m\frac{v^2}{r}\vec{u}_r = -g_0 m\frac{R_T^2}{r^2}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2 = \frac{g_0 R_T^2}{r}}$$

6. Énergie cinétique : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_c = \frac{mg_0R_T^2}{2r}}$.

Énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{mg_0R_T^2}{2r} - \frac{mg_0R_T^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{mg_0R_T^2}{2r}}$$

L'énergie mécanique est toujours négative pour un **mouvement lié**.

7. Application numérique :

$$\mathcal{E}_m(r_b) = -\frac{10 \times 4,0 \times 10^3 \times (6,4 \times 10^6)^2}{2 \times 8 \times 10^6} = -\frac{2^2 \times 10^4 \times (2^6 \times 10^5)^2}{2^4 \times 10^6}$$

$$\mathcal{E}_m(r_b) = -2^{10} \times 10^8 \text{ J}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_m(r_b) = -1,0 \times 10^{11} \text{ J}} \quad \boxed{\mathcal{E}_m(r_h) = -2,0 \times 10^{10} \text{ J}}$$

3.3 Étude énergétique du satellite

8. La seule force présente dérive d'une énergie potentielle, **l'énergie mécanique se conserve**.

On exprime alors l'énergie mécanique comme somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en utilisant l'expression du moment cinétique :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{g_0mR_T^2}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{g_0mR_T^2}{r}$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{L_o^2}{m^2r^4} - \frac{g_0mR_T^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_o^2}{2mr^2} - \frac{g_0mR_T^2}{r}}$$

9. Le terme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ étant positif ou nul, l'énergie potentielle effective est nécessairement inférieure ou égale à l'énergie mécanique.

10. Étude de l'énergie potentielle effective
   (a) Une trajectoire elliptique est associée à un **état lié** et donc une énergie mécanique négative, du type $\mathcal{E}_{m,2}$.
   Une trajectoire hyperbolique est associée à un **état de diffusion** et donc une énergie mécanique positive, du type $\mathcal{E}_{m,1}$.
   (b) Une trajectoire circulaire est associée à un rayon r constant, c'est à dire $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{min}$.

3.4 Mise en orbite haute du satellite

11. L'apogée et le périgée sont associés à des valeurs extrémales de la distance r, on a donc nécessairement $\boxed{\dot{r} = 0}$ en ces points.
    On a : $\boxed{2a = r_h + r_b}$.
12. Pour r_b et r_h, $\dot{r} = 0$ et l'expression de l'énergie mécanique obtenue à la question 8 se simplifie selon :
    $$\mathcal{E}_{m,t} = \frac{L_o^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r^2 \mathcal{E}_{m,t} = \frac{L_o^2}{2m} - g_0 m R_T^2 r$$
    C'est à dire : $\boxed{r^2 + \frac{g_0 m R_T^2}{\mathcal{E}_{m,t}} r - \frac{L_0^2}{2m\mathcal{E}_{m,t}} = 0}$
13. Pour cette équation du second degré qui admet deux racines réelles :
    $$r_b + r_h = -\alpha = -\frac{g_0 m R_T^2}{\mathcal{E}_{m,t}} \quad \text{avec} \quad 2a = r_b + r_h$$
    On en déduit : $\boxed{\mathcal{E}_{m,t} = -\frac{g_0 m R_T^2}{2a}}$.
14. La figure 5 représente l'énergie potentielle effective en fonction de la distance radiale. À l'apogée $r_h = 40 \times 10^3$ km et au périgée $r_a = 8,0 \times 10^3$ km, l'énergie potentielle effective s'identifie à l'énergie mécanique, on en déduit, par lecture graphique (intersection de l'énergie potentielle effective de l'orbite de transfert avec les droites $r = r_a$ ou $r = r_h$) :
    $$\boxed{\mathcal{E}_{m,t} \simeq -35 \text{ GJ}}$$
15. La trajectoire basse étant circulaire, l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective minimale, c'est à dire $\boxed{\mathcal{E}_{m,b} = -100 \text{ GJ}}$.
    De même $\boxed{\mathcal{E}_{m,h} = -20 \text{ GJ}}$.
16. $\Delta\mathcal{E}_{m,P} = \mathcal{E}_{m,t} - \mathcal{E}_{m,b}$ $\quad \boxed{\Delta\mathcal{E}_{m,P} = 65 \text{ GJ}}$
    $$m_c = \frac{65 \times 10^3}{50} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_c = 1,3 \times 10^3 \text{ kg}}.$$
17. Carburant pour les moteurs de fusée : O_2 et H_2 sous forme liquide.
    Un satellite en orbite géostationnaire apparaît fixe à un observateur sur Terre, il est situé à une altitude de l'ordre de 36×10^3 km.

3.5 Chute du satellite

18. En supposant la vitesse quasi-constante à l'échelle d'un tour :
    $$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{g_0 R_T^2 / r}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi r^{3/2}}{R_T \sqrt{g_0}}}$$
    On retrouve que le rapport de T^2/r^3 est une constante, il s'agit de la **troisième loi de Kepler**.
19. On applique le théorème de la puissance mécanique au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. La seule force non conservative est la force de frottement :
    $$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = P = \vec{f}.\vec{v} = -kv^2$$
    En appliquant les formules du mouvement circulaire :
    $$\frac{d}{d}\left(-\frac{g_0 m R_T^2}{2r(t)}\right) = -k\frac{g_0 R_T^2}{r(t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r(t)}\right) = \frac{k}{r} \quad \Rightarrow \quad -\frac{m}{2r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{k}{r}$$
    On en déduit : $\frac{dr}{dt} + \frac{r}{\tau} = 0$ avec $\boxed{\tau = \frac{m}{2k}}$.
    Le premier terme de l'équation étant le rapport d'une longueur par un temps, τ est nécessairement un temps.
20. Avec $r(0) = r_0$, on en déduit $\boxed{r(t) = r_0 \exp(-t/\tau)}$.