Lycée Naval, Sup 2.

Devoir surveillé n°06 (correction)

1 Question de cours

1. Soit un point matériel M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}}$ dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$. On appelle moment cinétique d'un point M par rapport à un point O dans un référentiel $\mathcal{R}$, le vecteur $\vec{L}_o$ défini par :

$$\boxed{\vec{L}_o(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{\mathcal{R}}}$$

2. Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée du moment cinétique du solide par rapport à son axe de rotation fixe $\Delta = (O, \vec{u})$ est égale à la somme des moments des forces par rapport à ce même axe :

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f_i}\right)}$$

2 Équilibre et stabilité d'une perle

2.1 Énergie potentielle de la perle

1. La perle est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{N}$ du cerceau (absence de frottements) et à la tension $\vec{T}$ du ressort.
La perle est soumise à des forces conservatives ($\vec{P}$ et $\vec{T}$) et la force $\vec{N}$ ne travaille pas, **l'énergie mécanique de la perle se conserve**.

2. De façon générale, $E_p = -mgz + cste$ (axe des z orienté vers le bas) ; avec $z = R\cos\theta$, on en déduit :
$$\mathcal{E}_{pes} = -mgR\cos\theta + cste \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{pes} = -mgR\cos\theta}$$
$z = 0$ correspond à $\theta = \pi/2$, l'expression de l'énergie potentielle retenue est bien nulle pour $z = 0$.

3. On remarque que $\widehat{AOP} = \pi - \theta$. On appelle H le projeté orthogonal de O sur AP. Comme $OA = OP$, le triangle AOP est isocèle. En conséquence l'angle $\widehat{AOH}$ vaut $\dfrac{\pi-\theta}{2}$ et donc :
$$AP = 2AH = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{AP = 2R\cos\frac{\theta}{2}}$$

4. L'allongement du ressort est $AP - l_0 = 2R\cos\dfrac{\theta}{2} - l_0$, on en déduit pour l'énergie potentielle élastique, nulle en l'absence d'allongement :
$$\boxed{\mathcal{E}_{el} = \frac{1}{2}k\left[2R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - l_0\right]^2}$$

5. L'énergie potentielle totale est la somme des énergies potentielles :
$$\boxed{\mathcal{E}_p = -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}k\left[2R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - l_0\right]^2}$$

2.2 Existence et stabilité des positions d'équilibre

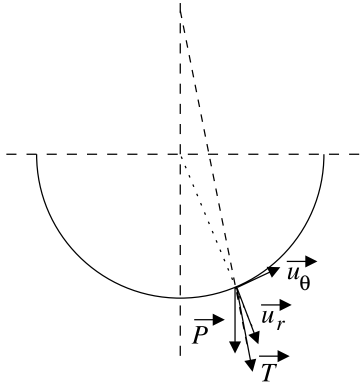
1. <u>Cas où $l_0 = 2R$</u> :

(a) On exprime $\mathcal{E}_p(0)$ avec $l_0 = 2R$:
$$\mathcal{E}_p(0) = -mgR + \frac{1}{2}k(l_0 - l_0)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_p(0) = -mgR}$$
On constate que la valeur est indépendante de k.
$$\mathcal{E}_p = -0,050 \times 10 \times 0,4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_p = -0,20\text{ J}}$$

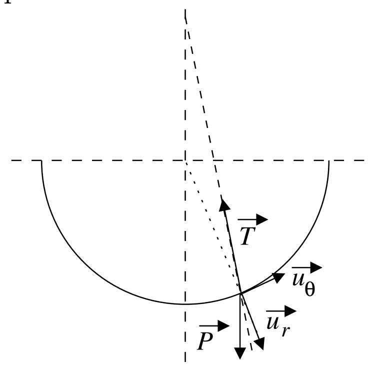
(b) Pour $l_0 = 2R$, l'énergie potentielle prend la forme :
$$\mathcal{E}_p(\theta) = -mgR\cos\theta + 2kR^2\left(\cos\frac{\theta}{2} - 1\right)^2$$
On commence par exprimer la dérivée première de l'énergie potentielle :
$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = mgR\sin\theta + 2kR^2 \times 2\left(\cos\frac{\theta}{2} - 1\right) \times -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$
$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = mgR\sin\theta - 2kR^2\left(\cos\frac{\theta}{2} - 1\right)\sin\frac{\theta}{2} = mgR\sin\theta - 2kR^2\left(\frac{\sin\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)$$
En $\theta = 0$, $\boxed{\dfrac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}(0) = 0}$, <u>la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre.</u>

On exprime alors la dérivée seconde :
$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} = mgR\cos\theta - 2kR^2\left(\frac{\cos\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
En $\theta = 0$, $\dfrac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}(0) = mgR > 0$, <u>la position d'équilibre est stable.</u>

(c) Comme $l_0 = 2R$, pour $\theta \neq 0$, le ressort est comprimé et la tension du ressort est répulsive ; pour $\theta \neq 0$, on constate que le poids et la tension du ressort ont des composantes dirigées selon $-\vec{u}_\theta$. Si on écarte la masse de la position d'équilibre $\theta = 0$, elle est rappelée vers cette position d'équilibre qui est donc stable.



2. Cas où $l_0 = R$
   (a) On constate qu'en fonction de la valeur de k, **la position d'équilibre $\theta = 0$ peut être stable ou instable**.
   (b) Comme $l_0 = R$, le ressort est étiré et la force du ressort est une force attractive, donc sa composante selon $\vec{u}_\theta$ est positive.
   Pour une valeur de k suffisamment grande, on conçoit que la composante orthoradiale de la tension peut dépasser la composante orthoradiale du poids, l'objet a donc tendance à s'éloigner de la position $\theta = 0$ qui devient une position d'équilibre instable.



3. Cas où $l_0 = 1,5R$
   (a) On note l'apparition de nouvelles positions d'équilibres pour des valeurs de k suffisamment grande.

2.3 Petits mouvements autour de la position $\theta = 0$ dans le cas où $l_0 = 2R$

1. Sachant que $l_0 = 2R$, l'énergie potentielle a pour expression :
$$\mathcal{E}_p(\theta) = -mgR\cos\theta + 2kR^2\left(\cos\frac{\theta}{2} - 1\right)^2$$
À l'aide de l'énoncé, on en déduit pour les petites valeurs de θ :
$$\mathcal{E}_p(\theta) = -mgR\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + 2kR^2 \times \frac{\theta^4}{64}$$
Ce qui donne en se limitant aux termes d'ordre 2 en θ :
$$\boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = -mgR + mgR\frac{\theta^2}{2}}$$

2. L'énergie mécanique de la perle se conserve, la perle se déplace sur un cercle de rayon R :
$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR + mgR\frac{\theta^2}{2}$$
L'énergie mécanique étant constante, on dérive par rapport au temps pour en déduire l'équation différentielle :
$$0 = \frac{1}{2}mR^2 \times 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{mgR}{2} \times 2\theta\dot{\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0}$$
Au voisinage de cette position d'équilibre stable, le système est équivalent à un système **masse-ressort**.

3. Le mouvement est <u>sinusoïdal</u> de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$.

4. Avec $T_0 = 2\pi/\omega_0$, on en déduit :
$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{g}{R} \quad \Leftrightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,40}{10}} \quad \boxed{T_0 = 1,3\ \text{s}}$$

3 Principe d'un tube cathodique (adapté, Centrale, PSI, 2014)

A - Canon à électrons

1. La force électrique est la seule force présente et dérive d'une énergie potentielle $E_p = qV$, on peut donc appliquer la conservation de l'énergie mécanique pour l'électron entre l'entrée (vitesse et potentiel nuls) et la sortie (vitesse v_0 et potentiel V_0) du dispositif :
$$E_c + E_p = cste \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 - eV_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0^2 = \frac{2eV_0}{m}}$$

2. <u>Application numérique</u> : $\boxed{v_0 = 2,65 \times 10^8\ \text{m/s}}$.

B - Dispositif de déviation du faisceau

1. La seule force présente est la force magnétique dont la puissance est nulle : $q\left(\vec{v}\wedge\vec{B}\right).\vec{v}=0$.
   L'application du théorème de l'énergie cinétique à la particule assure que l'énergie cinétique se conserve et donc la norme de la vitesse de la particule.

2. On applique la deuxième loi de Newton à l'électron soumis uniquement à la force magnétique dans le référentiel galiléen du laboratoire :
$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=-e\vec{v}\wedge\vec{B}$$
   Ce qui donne par projection :
$$\boxed{m\frac{dv_x}{dt}=eB_yv_z}\quad;\quad\boxed{m\frac{dv_y}{dt}=-eB_xv_z}\quad;\quad\boxed{m\frac{dv_z}{dt}=-e\left(v_xB_y-v_yB_x\right)}$$

3. La norme de sa vitesse se conserve, ce qui s'écrit :
$$v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=v_0^2$$
   Pour $v_x\ll v_z$ et $v_y\ll v_z$, on en déduit $\boxed{v_z\simeq v_0}$.

4. La vitesse étant constante selon Oz, $z=v_0\times t$ et en sortie : $\boxed{l=v_0t_f}$.

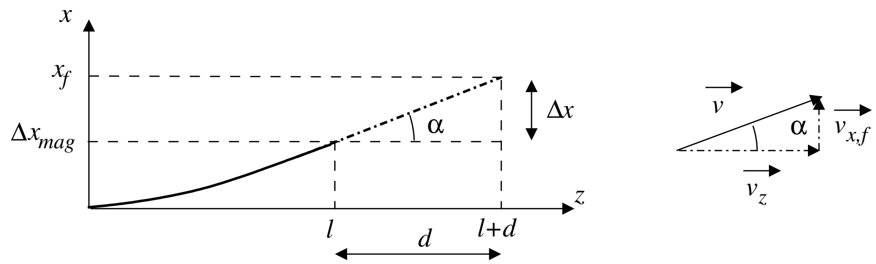
5. Avec cette hypothèse, il est alors aisé d'intégrer les équations du mouvement avec $v_x(0)=0$ et $v_y(0)=0$:
$$v_x(t)=\frac{eB_y}{m}v_0t\quad\text{et}\quad v_y(t)=\frac{-eB_x}{m}v_0t$$
   et en sortie : $l=v_0t_f$, donc :
$$\boxed{v_{x,f}=\frac{eB_y}{m}l}\quad\text{et}\quad\boxed{v_{y,f}=\frac{-eB_x}{m}l}$$

6. Pour obtenir les positions en sortie du dispositif, il suffit d'intégrer les expressions de $v_x(t)$ et $v_y(t)$ avec $x(0)=y(0)=0$:
$$\boxed{\Delta x_{mag}=\frac{eB_yl^2}{2mv_0}}\quad\text{et}\quad\boxed{\Delta y_{mag}=\frac{-eB_xl^2}{2mv_0}}$$

7. Seconde zone :

   (a) En l'absence de force, le mouvement est inertiel.

   (b) À la sortie du dispositif, les électrons ont un mouvement rectiligne uniforme qui ne dépend que de la vitesse acquise à la sortie comme indiqué sur le schéma suivant :



$$\Delta x_2=d\tan\alpha=d\frac{v_{x,f}}{v_z}=d\frac{v_{x,f}}{v_0}\ :$$
$$\boxed{\Delta x_2=\frac{eB_yl}{m}\frac{d}{v_0}}$$
   Et donc, de la même façon, pour le déplacement selon Oy :
$$\boxed{\Delta y_2=-\frac{eB_xl}{m}\frac{d}{v_0}}$$

8. Déplacement du spot :

   (a) La position sur l'écran s'obtient par addition des deux déplacements, ce qui donne pour le déplacement total :
$$\boxed{x_f=\frac{eB_yl}{mv_0}\left(d+\frac{l}{2}\right)}\quad\text{et}\quad\boxed{y_f=\frac{-eB_xl}{mv_0}\left(d+\frac{l}{2}\right)}$$

   (b) Les valeurs maximales de déplacement sont associées au maximum du champ magnétique :
$$B_{max}=\frac{x_f^{max}}{\frac{el}{mv_0}\left(l/2+d\right)}\quad\text{donc}\quad\boxed{B_{max}=60\text{ mT}}$$