Lycée Naval, Sup 2.

Devoir surveillé n°06 (le 30 janvier 2016, 2h)

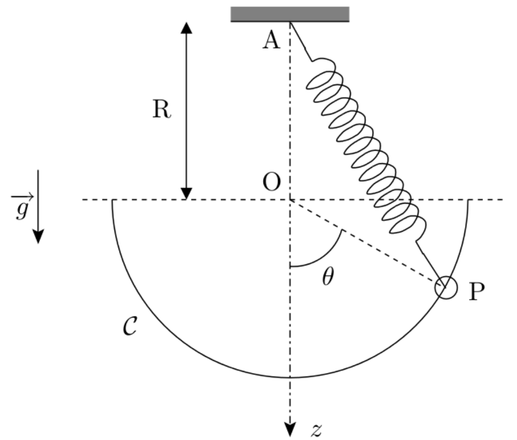
Calculatrice autorisée ; séparer les exercices, mettre en évidence les résultats

1 Question de cours

1. Donner l'expression du moment cinétique par rapport à O pour un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$.
2. Exprimer le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe. Préciser la signification des termes utilisés.

2 Équilibre et stabilité d'une perle

Une perle P de masse m, assimilable à un point matériel, est enfilée sur un demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R, fixé dans un plan vertical tel que son diamètre soit horizontal et que sa concavité soit tournée vers le haut.



On note (Oz) la verticale descendante passant par le centre de ce demi-cercle. La perle peut coulisser sans frottement sur le demi-cercle. Elle est attachée à l'extrémité du ressort de constante de raideur k et longueur à vide l_0, dont l'autre extrémité est fixée en un point A situé sur la verticale (Oz), à une distance R au dessus du point O égale au rayon du demi-cercle.

Le problème consiste à étudier l'existence et la stabilité d'éventuelles positions d'équilibre de la perle sur $\mathcal{C}$.
Le référentiel $\mathcal{R}$ auquel est lié $\mathcal{C}$ est supposé galiléen.

La position courante de la perle est repérée par l'angle θ formé par le segment OP avec la verticale descendante (Oz). Le champ de pesanteur est noté $\vec{g} = g\vec{u}_z$.

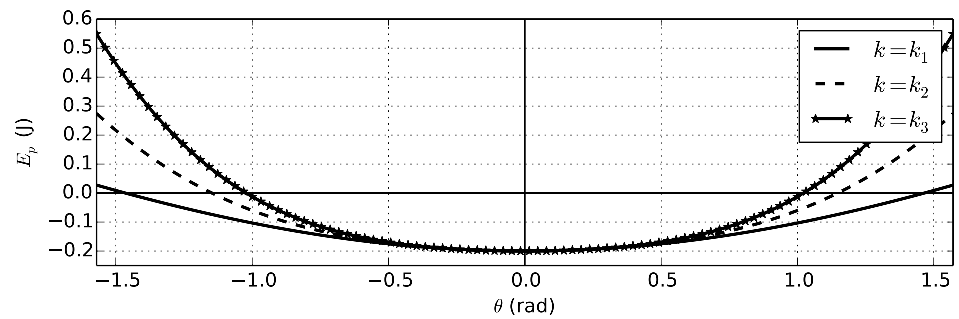
2.1 Énergie potentielle de la perle

1. Faire l'inventaire des forces appliquées sur la perle dans le référentiel $\mathcal{R}$. Pourquoi l'énergie mécanique de la perle est-elle constante ?
2. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pes}$ de la perle en fonction de θ et des données, sachant que l'on fixe une énergie potentielle nulle à l'altitude du point O (attention à l'orientation de l'axe (Oz)).
3. Démontrer la relation :
$$AP = 2R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
4. En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{el}$ de la perle en fonction de θ et des données, en fixant une énergie potentielle nulle pour un allongement nul du ressort.
5. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p$ de la perle, en fonction de θ, m, g, R, k et l_0.

2.2 Existence et stabilité des positions d'équilibre

Données : $m = 50$ g, $g = 10$ m.s^{-2}, $R = 40$ cm.
On a représenté ci-dessous les graphes donnant l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p$ de la perle en fonction de l'angle θ variant de $-90°$ à $90°$, pour les longueurs à vide l_0 prenant les valeurs $2R$, R et $1,5R$ et pour des constantes de raideur k prenant les valeurs $k_1 = 1,0$ N.m^{-1}, $k_2 = 10$ N.m^{-1} et $k_3 = 20$ N.m^{-1}.

1. Cas où $l_0 = 2R$:

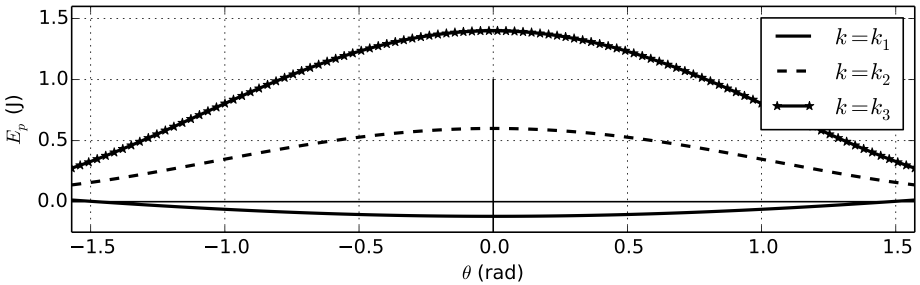


(a) Montrer, par le calcul, que la valeur de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\theta = 0)$ est indépendante de la constante de raideur k du ressort et calculer sa valeur.

(b) Vérifier, par le calcul et l'étude de l'énergie potentielle, que $\theta = 0$ est bien une position d'équilibre stable.

(c) Vérifier, **qualitativement**, à l'aide d'un schéma de forces, la stabilité de la position d'équilibre $\theta = 0$.
Indication : réfléchir au caractère comprimé ou étiré du ressort.

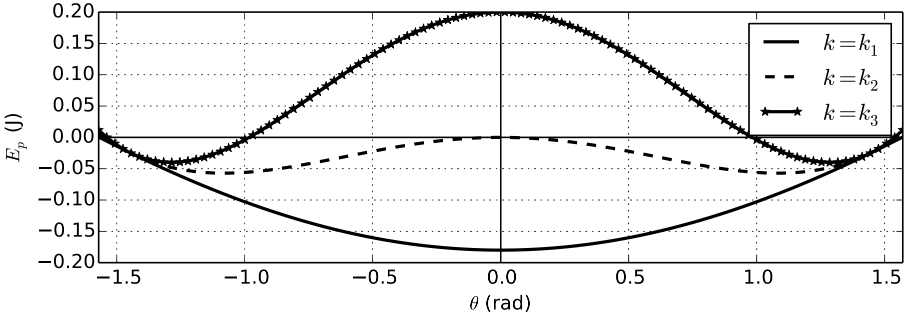
2. Cas où $l_0 = R$



(a) Graphiquement, que remarque-t-on concernant la position $\theta = 0$?

(b) Proposer une interprétation qualitative en vous appuyant sur un schéma de forces.

3. Cas où $l_0 = 1,5R$



Quelle différence note-t-on comparativement au cas où $l_0 = R$?

2.3 Petits mouvements autour de la position $\theta = 0$ dans le cas où $l_0 = 2R$

On s'intéresse aux petits mouvements de la perle autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0$ dans le cas particulier où la longueur à vide l_0 du ressort est égale au diamètre $2R$ du demi-cercle.
On considérera donc que $\theta \ll 1$ rad.

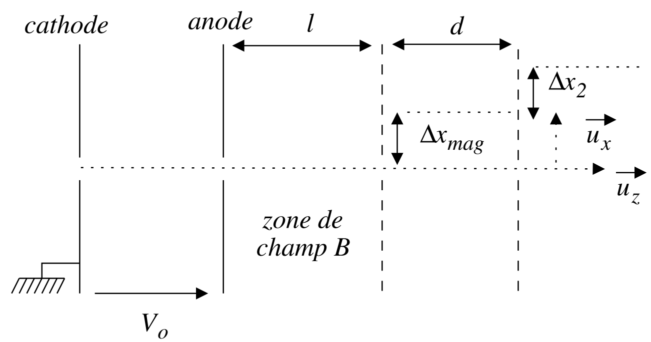
Donnée : pour $\alpha \ll 1$ rad, on admettra $\cos\alpha \simeq 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$.

1. En ne conservant que les termes en θ d'ordre inférieur ou égal à 2 (puissances inférieures ou égales à 2), montrer que l'énergie potentielle de $\mathcal{E}_p$ de la perle se met sous la forme approchée :
$$\mathcal{E}_p \simeq -mgR + mgR\frac{\theta^2}{2}$$
2. En déduire l'équation du mouvement de la perle. À quel système mécanique simple le système étudié est-il équivalent ?
3. Quelle est la nature de ce mouvement ? Donner l'expression de la pulsation ω_0 des oscillations en fonction des données.
4. Calculer numériquement la période T_0 de la perle au fond du demi-cercle.

3 Principe d'un tube cathodique

Nous allons étudier ici les principaux éléments d'un modèle simplifié de tube cathodique.

Le schéma ci-dessous présente les différentes zones du dispositif :



Données :
masse de l'électron $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg
charge de l'électron $e = -1,6 \times 10^{-19}$ C.

A - Canon à électrons

Le canon à électrons est constitué d'une électrode métallique plane (appelée cathode) chauffée et émettant des électrons par effet thermoélectronique. La cathode est au potentiel nul. Les électrons sont émis avec une vitesse négligeable et sont ensuite accélérés sous l'effet d'un champ électrique, créé par la différence de potentiel régnant entre la cathode émettrice, au potentiel nul, et une seconde électrode métallique plane (l'anode), parallèle à la cathode, portée au potentiel $V_0 = 2,0$ kV. On suppose, pour l'instant, que le faisceau électronique est parfaitement parallèle à l'axe de révolution Oz du tube cathodique, perpendiculaire aux deux électrodes et de diamètre négligeable. L'anode est percée en son centre pour permettre au faisceau de la traverser.

1. Exprimer la vitesse v_0 acquise par les électrons lorsqu'ils franchissent l'anode en fonction de V_0, m et e, où m désigne la masse de l'électron et e la charge élémentaire.
2. Calculer v_0 numériquement.

B - Dispositif de déviation du faisceau

Le faisceau sortant du canon à électrons est supposé homocinétique (de vitesse v_0) et est confondu avec l'axe de révolution Oz du tube cathodique. Nous étudions ici le dispositif permettant de dévier le faisceau dans le but de lui faire frapper un point quelconque de l'écran. Ce dispositif est constitué de deux paires de bobines plates identiques d'axes respectifs Ox et Oy dites « de Helmholtz » permettant de soumettre le faisceau à un champ magnétique constant et uniforme dans une zone de longueur $l = 5,0$ mm.
Le faisceau traverse ainsi une zone plongée dans un champ magnétique constant et uniforme $B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y$. On admettra qu'en dehors de cette zone, le champ magnétique est nul.

1. Justifier que la norme de la vitesse est une constante.
2. Écrire et projeter l'équation du mouvement d'un électron traversant cette zone pour en déduire les équations différentielles vérifiées par v_x, v_y et v_z, les composantes de la vitesse.
3. On suppose que les composantes de vitesse v_x et v_y sont très petites et négligeables devant v_z.
   Exprimer alors v_z en fonction de v_0.
4. Connaissant v_z, déterminer l'expression du temps passé dans la zone de champ magnétique de longueur l.
5. En déduire l'expression des composantes v_{xf} et v_{yf} de la vitesse d'un électron à la sortie de la zone de champ magnétique non nul.
   On rappelle que ces composantes de vitesse sont initialement nulles.
6. Montrer alors qu'à la sortie du dispositif les expressions des déviations transversales Δx_{mag} et Δy_{mag} subies par un électron du fait du champ magnétique ont pour expression :
$$\Delta x_{mag} = \frac{eB_y l^2}{2mv_0} \quad \text{et} \quad \Delta y_{mag} = \frac{-eB_x l^2}{2mv_0}$$
7. Entre la sortie de la zone de déviation et l'écran, l'électron traverse une zone de longueur $d = 2,0$ cm où le champ magnétique est nul.
   (a) Quel est le mouvement des électrons dans cette zone ?
   (b) Montrer que les déviations transversales Δx_2 et Δy_2 dans cette seconde zone ont pour expression :
$$\Delta x_2 = \frac{eB_y l}{m}\frac{d}{v_0} \quad \text{et} \quad \Delta y_2 = \frac{-eB_x l}{m}\frac{d}{v_0}$$
8. Le spot obtenu sur l'écran peut être dévié au maximum de $\pm 4,5$ mm selon les deux axes.
   (a) Donner l'expression du déplacement total sur chacun des axes (Ox) et (Oy).
   (b) Compte tenu de la valeur maximale autorisée pour la déviation, déterminer la valeur à ne pas dépasser pour les composantes B_x et B_y.