Lycée Naval, Sup 2.

Devoir surveillé n°05 (Correction)

1 Cours et applications du cours

1. Dans le référentiel terrestre galiléen, on applique la deuxième loi de Newton à l'objet soumis uniquement à son poids :
$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$
On projette selon l'axe vertical ascendant et on intègre deux fois ; compte tenu des conditions initiales :
$$\ddot{z} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -gt \quad \Rightarrow \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + h$$
Lorsque l'objet atteint le sol : $z(\tau) = 0$, donc $h = \dfrac{g\tau^2}{2}$:
$$\boxed{\tau = \sqrt{2h/g}}$$
2. $\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z}$
$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z}$ (Cf. cours pour la démonstration)
3. Dans un référentiel galiléen, un mobile soumis à des forces qui se compensent a un mouvement rectiligne et uniforme.

2 Mouvement d'un palet (d'après ENAC)

1. On choisit l'origine de l'énergie potentielle en A avec $z_B = R\cos\alpha$.
L'application de la conservation de l'énergie mécanique donne :
$$\frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}mV_B^2 + mgR\cos\alpha \quad \text{donc} \quad \boxed{V_B = \left(V_A^2 - 2gR\cos\alpha\right)^{1/2}}$$
2. B est atteint si V_B est définie, ce qui impose :
$$\boxed{V_A \geq V_{A,l} = \sqrt{2gR\cos\alpha} = \sqrt{2\times 10\times 2\times\sqrt{3}/2} = \sqrt{40} \simeq 5,9\ \text{m.s}^{-1}}$$
3. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique la deuxième loi de Newton au palet qui se déplace sur la plan incliné en étant soumis à son poids et à la réaction du support :
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{N}$$
Appelons (Ay) l'axe dirigé par la direction AB et projetons la relation précédente sur cet axe sachant que $\vec{N}.\vec{u}_y = 0$:
$$m\frac{dv_y}{dt} = m\vec{g}.\vec{u}_y = -mg\sin\alpha \quad \text{donc} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g\sin\alpha$$
On intègre alors la relation précédente entre les points A et B :
$$V_B - V_A = -g\sin\alpha\times\tau \quad \text{donc} \quad \boxed{\tau = \frac{V_A - V_B}{g\sin\alpha}}$$
4. Sur la portion circulaire, projetons la deuxième loi de Newton sur la direction radiale de la base des coordonnées polaires :
$$ma_r = m\vec{g}.\vec{u}_r + N$$
L'accélération radiale a pour expression générale : $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$; pour un mouvement circulaire de rayon R, l'expression précédente se simplifie selon : $a_r = -R\dot{\theta}^2$.
On en déduit :
$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N \quad \text{donc} \quad \boxed{N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2}$$
5. Appliquons à nouveau la conservation de l'énergie mécanique ; en un point de la portion circulaire repéré par l'angle θ, la vitesse du mobile vaut $R\dot{\theta}$ et l'altitude de ce point est $z = R\cos\theta$.
$$\frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta \quad \text{donc} \quad R\dot{\theta}^2 = \frac{V_A^2}{R} - 2g\cos\theta$$
Cette dernière relation permet d'éliminer $\dot{\theta}$ de l'expression de la réaction pour en déduire :
$$\boxed{N = 3mg\cos\theta - \frac{mV_A^2}{R}}$$
6. Le décollage est caractérisé par l'annulation et le changement de signe de la composante normale de la réaction. Pour qu'il n'y ait pas décollage, il faut que, sur la portion entre B et le sommet :
$$3mg\cos\theta - \frac{mV_A^2}{R} > 0$$
Cette condition sera vérifiée $\forall\theta\in[0,\alpha]$ si $3mg\cos\alpha - \dfrac{mV_A^2}{R} > 0$, c'est à dire :
$$V_A < \sqrt{3gR\cos\alpha} = \sqrt{3\times 10\times 2\times\sqrt{3}/2} = \underline{7,2\ \text{m.s}^{-1}}$$
7. Le palet finit par quitter la piste lors de l'annulation de la composante normale de la réaction :
$$3mg\cos\theta - \frac{mV_A^2}{R} = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\cos\theta_d = \frac{V_A^2}{3gR}}$$

3 Fonctionnement d'un airbag

1. La masse M poursuit dans son mouvement vers les X négatifs et se rapproche du point O.

2. Pour $t < 0$ et $t > t_c$: $\boxed{\vec{a}(O) = \vec{0}}$
Pour $0 < t < t_c$, par définition du vecteur accélération :
$$\vec{a}(O) = \frac{\vec{v}(t_c) - \vec{v}(0)}{t_c - 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}(O) = \frac{v_0}{t_c}\vec{u}_x}$$

3. Par définition du vecteur accélération de M dans le référentiel terrestre :
$$\vec{a}(M) = \frac{d^2\overrightarrow{TM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{TO}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}(M) = \vec{a}(O) + \ddot{x}\vec{u}_x}$$

4. On applique la relation fondamentale de la dynamique à la la masse M dans le référentiel terrestre. La masse est soumise à son poids, à la réaction du support, à la force de frottement fluide et à la tension du ressort. Seules les deux dernières ont une composante non nulle en projection selon (Ox) :
$$m\vec{a}(M).\vec{u}_x = m\left(a_0 + \ddot{x}\right) = -k(x - l_0) - \alpha\dot{x}$$
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0 - a_0$$
On pose alors :
$\rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$; $\rightarrow \frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$, donc $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$.
$\rightarrow \omega_0^2 x_e = \omega_0^2 l_0 - a_0$, donc $\boxed{x_e = l_0 - a_0/\omega_0^2}$.

5. x_e est la solution du régime permanent, c'est à dire la **solution d'équilibre** une fois le régime transitoire amorti.

6. Pour $Q \ll 1$, la solution du régime transitoire est une solution apériodique qui tend très lentement vers 0 ; le système atteint très lentement la nouvelle valeur d'équilibre.
L'Airbag risque alors de se déclencher trop tardivement.

7. Pour $0 < t < t_c$, l'accélération a_0 est une constante et le second membre est constant. La solution du problème est la somme d'une solution particulière et de la solution de l'équation homogène :
$$x(t) = x_e + e^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$$
avec $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$ et $\boxed{\omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}}$.

8. Connaissant l'expression de la position, on en déduit celle de la vitesse :
$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right] + e^{-t/\tau}\left[-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right]$$
Les conditions initiales permettent d'écrire le système d'équation :
$$l_0 = x_e + A \quad \text{et} \quad 0 = -\frac{A}{\tau} + B\omega$$
Compte tenu de l'expression de $x_e = l_0 - a_0/\omega_0^2$, on en déduit :
$$\boxed{A = \frac{a_0}{\omega_0^2} = \frac{ma_0}{k}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \frac{A}{\omega\tau}}$$

9. En dérivant l'expression de la position, on en déduit la vitesse :
$$\dot{x}(t) = -\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega t)\right] + Ae^{-t/\tau}\left[-\omega\sin(\omega t) + \frac{1}{\tau}\cos(\omega t)\right]$$
Les termes en cosinus se simplifient et on en déduit :
$$\boxed{v(t) = -A \times \left(\frac{1 + \omega^2\tau^2}{\tau^2\omega}\right) \times e^{-t/\tau}\sin(\omega t)}$$

10. La première annulation de la vitesse correspond à l'annulation du sinus, c'est à dire $\omega t_d = \pi$, soit $\boxed{t_d = \pi/\omega}$.

11. La distance minimale correspond à la position pour $t = t_d$, c'est à dire :
$$x(t_d) = x_e + Ae^{-t_d/\tau}\left(\cos\pi + \frac{1}{\omega\tau}\sin\pi\right) = l_0 - \frac{a_0}{\omega_0^2} - \frac{a_0}{\omega_0^2}e^{-t_d/\tau}$$
$$\boxed{d = l_0 - \frac{a_0}{\omega_0^2}\left(1 + e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}}\right)}$$

12. Plus la décélération a_0 est forte plus la distance minimale sera faible ; l'accélération doit au moins atteindre une valeur limite qui vérifie :
$$l_0/2 = l_0 - \frac{a_{0,min}}{\omega_0^2}\left(1 + \exp\left(-\frac{\pi}{\omega\tau}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad a_{0,min} = \frac{l_0}{2}\frac{k/m}{1 + \exp\left(-\frac{\pi}{\omega\tau}\right)}$$
Avec $\omega\tau = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} \times \frac{2Q}{\omega_0} = \sqrt{4Q^2 - 1}$, on en déduit :
$$\boxed{a_{0,min} = \frac{l_0}{2} \times \frac{k/m}{1 + \exp\left(-\pi/\sqrt{4Q^2 - 1}\right)}}$$

13. Application numérique :
$$a_{0,min} = \frac{0,02}{2} \times \frac{55/0,01}{1 + \exp(-\pi/\sqrt{3})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{0,min} = 47,3 \text{ m.s}^{-2}}$$
Or $5g = 5 \times 9,81 = 49$ m.s^{-2} $> a_{0,min}$, **le dispositif est donc bien capable de détecter des accélérations de** $5g$.