Lycée Naval, Sup 2.

Devoir surveillé n°05 (le 16 janvier 2016, 2h)

Calculatrice autorisée

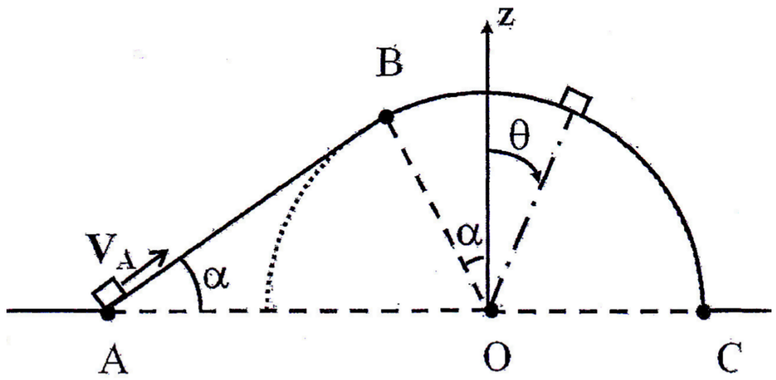
Séparer les exercices, justifier et mettre en évidence les résultats

1 Cours et applications du cours

1. Un objet est lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur h. On néglige les frottements et la poussée d'Archimède, déterminer l'instant τ auquel il atteint le sol.
2. Rappeler sans démonstration l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques.
   En déduire, en détaillant le calcul, l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques.
3. Énoncer la première loi de Newton.

2 Mouvement d'un palet (d'après ENAC)

Un palet M de masse $m = 5,0$ kg, assimilé à un point matériel, est lancé sur une piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon $R = 2,0$ m et d'angle $BOC = \pi/2 + \alpha$ (Cf. figure ci-dessous). Le palet, initialement lancé depuis A avec la vitesse V_A glisse sans frottement sur la piste. On désigne par $g = 10$ m.s^{-2} l'intensité du champ de pesanteur.



1. Montrer que la vitesse V_B a pour expression :
$$V_B = \left(V_A^2 - 2gR\cos\alpha\right)^{1/2}$$
2. Afin que le point B soit effectivement atteint par le palet, il est nécessaire que $V_A > V_{A,l}$. Calculer $V_{A,l}$.
   Pour les questions suivantes, on suppose la condition précédente vérifiée.
3. En appliquant la deuxième loi de Newton au palet, montrer que la durée τ de parcours de la portion AB a pour expression :
$$\tau = \frac{V_A - V_B}{g\sin\alpha}$$
4. En appliquant la deuxième loi de Newton sur la partie BC, exprimer N la norme de la réaction du support en fonction de θ et $\dot{\theta}$.
5. En appliquant la conservation de l'énergie mécanique sur la partie circulaire, en déduire que :
$$N = 3mg\cos\theta - \frac{mV_A^2}{R}$$
6. À quelle condition sur V_A n'y aura-t-il pas de décollage avant le sommet ?
7. Déterminer, en fonction des données du problème, l'angle θ_d de θ pour lequel le palet quitte la piste.

3 Fonctionnement d'un airbag

À bord d'un véhicule, l'airbag est aujourd'hui l'un des éléments essentiels permettant d'assurer la protection des passagers lors d'un accident.
Le détecteur de chocs qui déclenche l'ouverture de l'airbag est par exemple constitué d'une masse mobile aimantée M retenue par un ressort.
Au cours d'un choc, plus la décélération est importante, plus la masse se déplace. Si le déplacement est suffisamment important, la masse aimantée met en contact électrique deux lames métalliques, ce qui permet ainsi de déclencher l'ouverture de l'airbag.

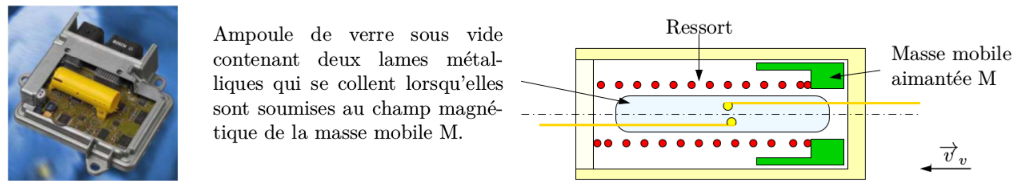
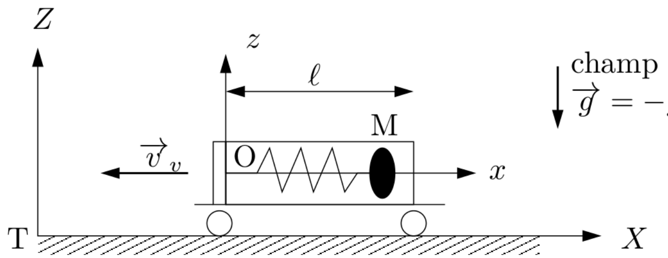


Figure 1 – Schéma d'un détecteur de choc et photo du détecteur sur son circuit électrique

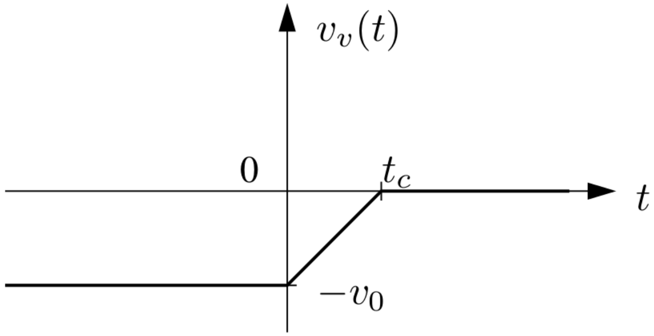
On note $\mathcal{R}_T$ $(T, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$ le référentiel terrestre galiléen associé à la route.

Le véhicule se déplace à la vitesse $\vec{v} = v_v(t)\vec{u}_X$ par rapport à la route ($v_v < 0$).



O désigne un point fixe du véhicule.
Le véhicule est équipé d'un système de détection de chocs dont la masse mobile M peut se déplacer suivant la direction Ox. On note m sa masse et $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x$, le vecteur position du point M par rapport au véhicule.
Un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 relie le point O au point mobile M. Le point mobile M subit lors de son déplacement une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\dot{x}\vec{u}_x$.

Le véhicule roule à une vitesse v_0 suivant la direction $-\vec{u}_X$ avant de subir un choc frontal à l'instant $t = 0$. La vitesse évolue comme indiqué sur la figure ci-dessous :



1. Lorsque le véhicule s'arrête brutalement dans quelle direction se déplace la masse M. Justifier la réponse.
2. On note $\vec{a}(O) = a_0\vec{u}_x$ le vecteur accélération du point O dans le référentiel terrestre.
   À l'aide de la figure ci-dessus, exprimer ce vecteur accélération en fonction des données sur chacune des phases : $t < 0$, $0 < t < t_c$ et $t > t_c$.
3. En remarquant que $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OM}$, exprimer $\vec{a}(M)$ le vecteur accélération du point M dans le référentiel terrestre en fonction de $\vec{a}(O)$ et $\ddot{x}$.
4. Montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement de M peut se mettre sous la forme :
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$$
   On exprimera ω_0, Q et x_e en fonction de m, k, l_0, a_0 et α.
   Attention que x est la longueur du ressort et non pas son allongement.
5. Quelle est la signification physique de la grandeur x_e ? Justifier.
6. Quel serait l'inconvénient de choisir $Q \ll 1$?
7. On considère maintenant que le facteur de qualité Q est tel que le régime est pseudo-périodique.
   Montrer que, pour $0 \leq t < t_c$, $x(t)$ peut se mettre sous la forme :
$$x(t) = e^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right] + x_e$$
   On exprimera τ et ω en fonction de ω_0 et Q.
8. À l'aide des conditions initiales $x(0) = l_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, montrer que $A = \dfrac{ma_0}{k}$ et $B = \dfrac{A}{\tau\omega}$.
9. Montrer que la vitesse de la masse M peut se mettre sous la forme :
$$v(t) = -A \times \left(\frac{1+\omega^2\tau^2}{\omega\tau^2}\right) \times e^{-t/\tau}\sin(\omega t)$$
   À l'instant $t = t_d > 0$, la vitesse de la masse M par rapport à la voiture s'annule une première fois, M est alors au plus près du point O. On note $d = x(t = t_d)$ la distance minimale qui sépare O de la masse M.
10. Montrer que $t_d = \pi/\omega$.
11. En déduire l'expression de la distance minimale d en fonction de a_0, m, k, l_0, τ et ω.

    Si la distance minimale devient inférieur à $l_0/2$, la masse mobile aimantée se trouve alors sur le contact électrique qui déclenche l'ouverture de l'airbag.
12. En déduire l'expression de la décélération minimale du véhicule $a_{0,min}$ qui déclenche l'ouverture de l'airbag en fonction de l_0, k, m, et Q.

    Les caractéristiques du capteur sont les suivantes $l_0 = 2,0$ cm, $m = 10$ g, $k = 55$ N/m, $Q = 1$ et $g = 8,81$ m.s^{-2}.
13. Vérifier que le capteur est capable de détecter des accélérations de $5g$.