Devoir surveillé n°04 (le 05 décembre, 2h)

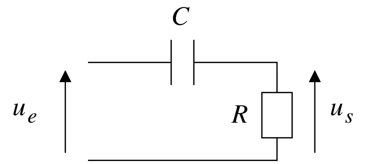
1 Résolution de problème (oral CCP PSI 2015)

→ La période du signal parasite est de 0,10 s, soit une fréquence $\underline{f_b = 10 \text{ Hz}}$.
→ La fréquence du signal à conserver est 50 fois plus élevée (50 oscillations pour la même durée de 0,10 s), c'est à dire $\underline{f_h = 500 \text{ Hz}}$.

Pour supprimer le signal parasite basse fréquence sans affecter le signal haute fréquence, on peut suggérer un **filtre passe-haut du premier ordre** avec une $\underline{\text{fréquence de coupure } f_c = 100 \text{ Hz}}$. Avec un rapport $f_c/f_b = 10$, on peut espérer une atténuation de l'ordre d'un facteur 10 pour le signal parasite.

Un filtre d'ordre plus élevé serait plus efficace mais plus complexe en terme de composants.

On réalise le filtre à l'aide d'un condensateur et d'une résistance :



La fonction de transfert s'écrit $\underline{H} = \dfrac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$ avec $\tau = RC$, la fréquence de coupure vérifie : $2\pi f_c \tau = 1$, c'est à dire :

$$RC = \frac{1}{2\pi f_c}$$

Avec une résistance usuelle $\boxed{R = 1,0 \text{ k}\Omega}$, on retient une capacité :

$$C = \frac{1}{2\pi f_c \times R} = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 1000} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 1,6 \ \mu\text{F}}$$

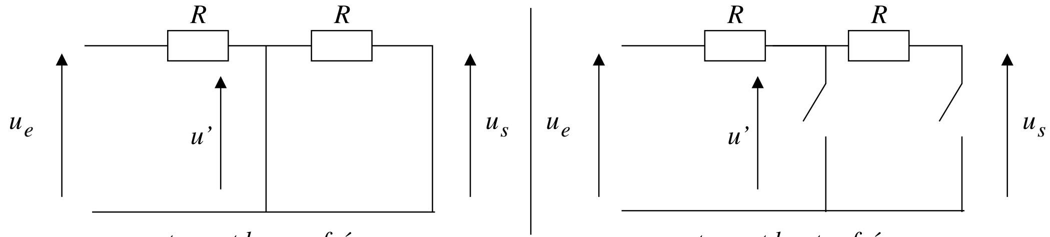
2 Obtention d'un filtre ADSL (concours national Grandes Écoles 2011)

2.1 Choix d'un type de filtre

1. Il s'agit de préserver le signal haute fréquence (signal informatique) et d'éliminer le signal basse fréquence (signal téléphonique), on retient un **filtre passe-haut**.
2. Il s'agit de préserver le signal basse fréquence (signal téléphonique) et d'éliminer le signal haute fréquence (signal informatique), on retient un **filtre passe-bas**.
3. Dans chacune des situations, la fréquence de coupure doit être située entre la fréquence maximale du signal basse-fréquence et la fréquence minimale du signal haute-fréquence, on peut retenir $\boxed{f_c \simeq 10 \text{ kHz}}$.

2.2 Étude d'un filtre

1. En basse-fréquence, les bobines se comportent comme des fils, la tension de sortie est nulle.



comportement basse−fréquence *comportement haute−fréquence*

En haute-fréquence, les bobines se comportent comme des interrupteurs ouverts, l'intensité du courant est alors nulle dans les résistances, la tension se reportent en totalité en sortie.

Le filtre laisse passer les hautes fréquences (signal internet) et élimine les basses fréquences, le quadripôle est un **filtre passe-haut**.

2. Sur la partie aval du montage, on applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{\underline{Z}_L}{R+\underline{Z}_L}\underline{u}' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{u}_s = \frac{jL\omega}{R+jL\omega}\underline{u}'}$$

Pour appliquer le pont diviseur de tension entre $\underline{u}_e$ et $\underline{u}'$, il faut commencer par déterminer l'impédance équivalente à l'association parallèle {résistance et bobine en série, bobine} :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{(R+\underline{Z}_L)\underline{Z}_L}{R+2\underline{Z}_L} = \frac{(R+jL\omega)jL\omega}{R+2jL\omega}$$

On peut alors appliquer la formule du pont diviseur de tension :

$$\boxed{\underline{u}' = \frac{\underline{Z}_{eq}}{R+\underline{Z}_{eq}} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{eq} = \frac{(R+jL\omega)jL\omega}{R+2jL\omega}}$$

3. On peut alors combiner les deux relations précédentes pour en déduire la fonction de transfert du filtre :
$$\frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u'}} \times \frac{\underline{u'}}{\underline{u_e}} = \frac{jL\omega}{\cancel{R + jL\omega}} \times \frac{\cancel{(R + jL\omega)}jL\omega}{R(R+2jL\omega)+(R+jL\omega)jL\omega}$$
$$\frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{-L^2\omega^2}{R^2+2jRL\omega+jRL\omega-L^2\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{-L^2\omega^2/R^2}{1+\dfrac{3jL\omega}{R}-L^2\omega^2/R^2}}$$
En posant $x = \omega/\omega_0$ et $\omega_0 = R/L$, on obtient le résultat souhaité avec $\boxed{a = 3}$.

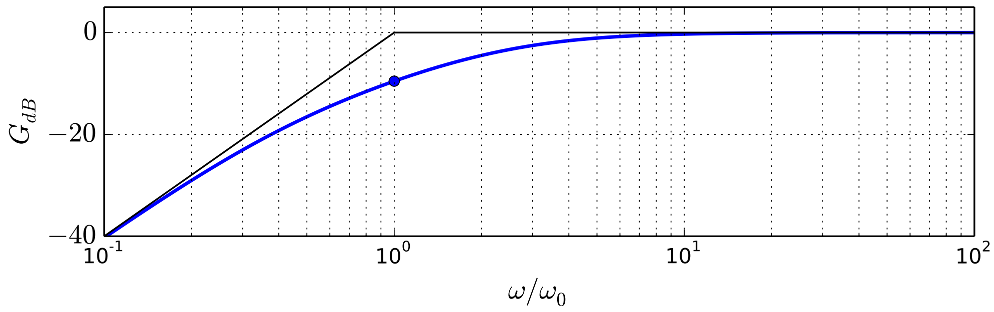
4. On commence par exprimer le gain en décibel :
$$G_{dB} = 20\log\left(\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2+9x^2}}\right)$$
$x \to 0$: $G_{dB} \sim_0 +40\log(x)$ (on reconnaît l'asymptote d'un filtre passe-haut du second ordre)

$x \to 1$: $G_{dB} = -20\log 3 \simeq -9,5$ dB

$x \to +\infty$: $G_{dB} \to 0$

Valeurs de x	$x \to 0$	$x = 1$	$x \to +\infty$
G_{dB} (décibels)	$\sim_0 +40\log(x)$	$-9,5$ dB	0

5. On est en présence d'un filtre passe-haut avec une pente à $+40$ dB/décade à basse fréquence et une asymptote horizontale à haute fréquence. On peut s'aider du point de passage en $x = 1$ pour tracer la courbe.



6. On a :
$$x_c = \frac{\omega_c}{\omega_0} = \frac{2\pi f_c}{\omega_0} = \frac{2\pi f_c}{R/L} = \frac{2\pi f_c L}{R}$$
On en déduit :
$$R = \frac{2\pi f_c L}{x_c} = \frac{2\pi \times 1,5 \times 10^4 \times 1,40 \times 10^{-3}}{2,67} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 49,4\ \Omega}$$

3 Amortissement d'un circuit RLC (extrait Centrale TSI 2011)

1. La loi d'additivité des tensions conduit à :
$$u_L + u_R + u = 0 \quad \Rightarrow \quad L\frac{di}{dt} + Ri + u = 0 \quad \Rightarrow \quad LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = 0$$
En posant $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$, on en déduit :
$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0}$$
Les régimes possibles sont :
$\to$ $Q < 1/2$ régime apériodique ;
$\to$ $Q = 1/2$ régime critique ;
$\to$ $Q > 1/2$ régime pseudo-périodique.

2. Résolution.

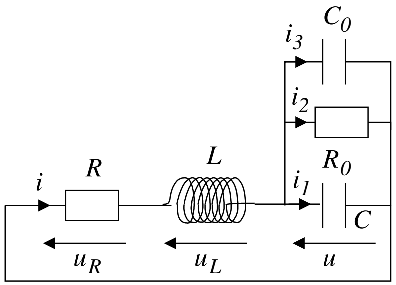
(a) La tension aux bornes du condensateur est continue $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = U_0}$.
L'intensité du courant circulant dans la bobine est continue $i(0^+) = i(0^-) = 0$, avec $i = C\dfrac{du}{dt}$, on en déduit : $\boxed{\dfrac{du}{dt}(0^+) = 0}$.

En l'absence de second membre, la solution s'identifie à la solution de l'équation homogène :
$$u(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$$
Les deux conditions initiales sont équivalentes au système d'équations :
$$U_0 = A \quad \text{et} \quad -\frac{\omega_0}{2Q}A + \omega B = 0$$
Avec $\omega = \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$, on en déduit :
$$\forall t \geq 0, \quad \boxed{u(t) = U_0 e^{-\omega_0 t/(2Q)}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\omega t)\right]}$$

(b) On a : $\boxed{\omega = \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}$ et le temps caractéristique d'amortissement : $\boxed{\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}}$.

3. Présence de l'oscilloscope :

(a) On considère un schéma prenant en compte l'oscilloscope en parallèle du condensateur :



La loi des nœuds conduit à :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_0} + C_0\frac{du}{dt}$$

Expression que l'on combine à la loi des mailles : $0 = u_R + u_L + u$

$$0 = Ri + L\frac{di}{dt} + u = R(C+C_0)\frac{du}{dt} + \frac{R}{R_0}u + L(C+C_0)\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R_0}\frac{du}{dt} + u$$

On en déduit l'équation recherchée :

$$\boxed{L(C+C_0)\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0\right)\frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u = 0}$$

(b) Pour se ramener à la première équation, et négliger la présence de l'oscilloscope, il faut :

— $R \ll R_0 = 1$ MΩ, avec R de l'ordre de 1 kΩ ou moins la condition est vérifiée ;

— $C \gg C_0 = 11$ pF, avec C de l'ordre de 1 μF la condition est vérifiée ;

— $\frac{L}{R_0} \ll RC$, c'est à dire $L \ll RCR_0 \simeq 10^3 \times 10^{-6} \times 10^6 = 10^3$ H, là encore cela ne pose aucun problème.

(c) Sachant que $m\omega T = 2\pi m$,

$$u(t+mT) = U_0 e^{-\omega_0(t+mT)/(2Q)}\left(A\cos\left[\omega(t+mT)\right] + B\sin\left[\omega(t+mT)\right]\right)$$

$$u(t+mT) = u(t)e^{-m\omega_0 T/(2Q)} \quad \Rightarrow \quad d_m = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+mT)}\right) = \frac{m\omega_0 T}{2Q}$$

Avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$, on obtient :

$$d_m = \frac{\omega_0 m}{2Q}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi m}{Q}\frac{\omega_0}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_m = \frac{2\pi m}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$$

(d) L'observation de plusieurs oscillations garantit que la valeur du facteur de qualité est au moins de quelques unités et on peut simplifier l'équation précédemment obtenue selon :

$$d_m \simeq \frac{2\pi m}{2Q} \simeq \frac{\pi m}{Q}$$

Pour une meilleure précision, on considère quatre oscillations ($m = 4$) et une amplitude qui passe de 4 V à 0,5 V :

$$\ln\left(\frac{4}{0,5}\right) = \frac{4\pi}{Q} \quad \Rightarrow \quad Q \simeq \frac{4\pi}{\ln(4/0,5)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q \simeq 6}$$

4. Étude énergétique :

(a) Pour $R = 0$, le régime est périodique $\boxed{u(t) = U_0\cos(\omega_0 t)}$ et $i(t) = C\frac{du}{dt}$, c'est à dire $\boxed{i(t) = -CU_0\omega_0\sin(\omega_0 t)}$

L'énergie électromagnétique est la somme de l'énergie stockée dans le condensateur et dans la bobine :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu(t)^2 + \frac{1}{2}Li(t)^2 = \frac{1}{2}CU_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}LC^2\omega_0^2U_0^2\sin^2(\omega_0 t)$$

Avec $LC\omega_0^2 = 1$, on en déduit :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU_0^2\left[\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU_0^2}$$

(b) L'énergie dissipée par effet Joule en une période T correspond à la différence entre l'énergie électromagnétique à l'instant t et à l'instant $t + T$:

$$W_J = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T) = \frac{1}{2}C\left[u^2(t) - u^2(t+T)\right] = \frac{1}{2}Cu^2(t)\left[1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 T}{Q}\right)\right]$$

Pour $Q \gg 1$, on peut assimiler ω_0 et ω, donc $\frac{\omega_0 T}{Q} \simeq \frac{2\pi}{Q}$

En posant $\varepsilon = \frac{2\pi}{Q} \ll 1$, et en utilisant l'indication de l'énoncé, on en déduit :

$$W_J = \frac{1}{2}Cu^2(t)\left[1 - \exp(-2\pi/Q)\right] \simeq \mathcal{E}\left(1 - \left[1 - 2\pi/Q\right]\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_J = \frac{2\pi}{Q}\mathcal{E}}$$