Lycée Naval, Sup 2.

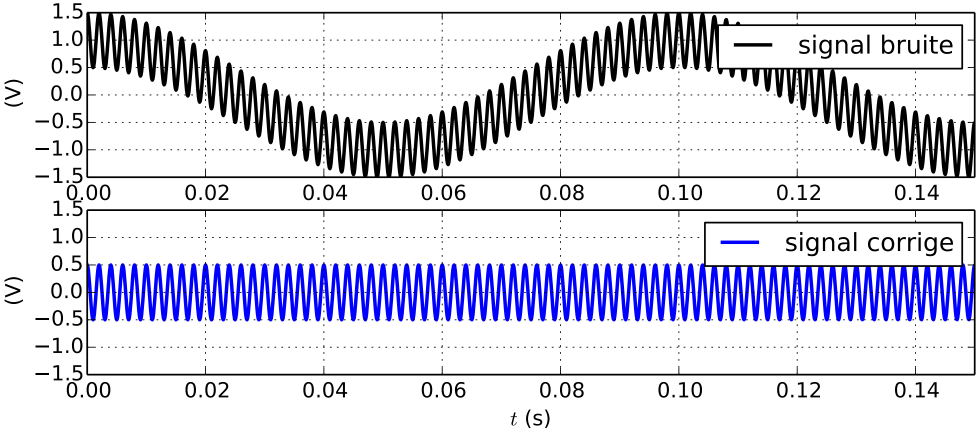
Devoir surveillé n°04 (le 05 décembre, 2h)

Calculatrice autorisée

Séparer les exercices, justifier et mettre en évidence les résultats

1 Résolution de problème : choix d'un filtre

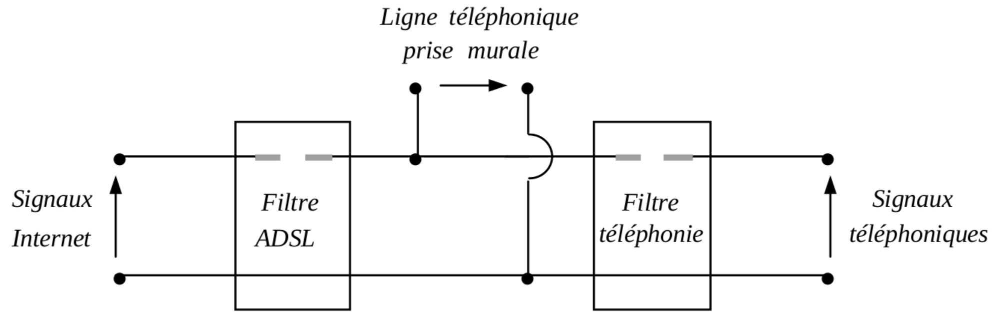
Un signal haute fréquence est parasité par un signal basse fréquence.
Le signal parasité et le signal corrigé sont représentés ci-dessous.



Proposer un filtre simple permettant de passer, au moins de manière approchée, du signal bruité au signal corrigé.
On attend un raisonnement, un schéma du montage et des **valeurs numériques** réalistes et adaptées aux fréquences présentes pour les composants utilisés.

2 Obtention d'un filtre ADSL

Les lignes téléphoniques acheminent les signaux téléphoniques traditionnels (fréquences f comprises entre 0 et 5,0 kHz) qui permettent les échanges de conversation et les signaux informatiques « Internet » (fréquences f comprises entre 25 kHz et 2,5 MHz). Le but de cette partie est d'étudier un filtre qui permet de « récupérer » un seul type de signaux.
Tous les signaux (tension et intensité) considérés dans cet exercice sont supposés alternatifs sinusoïdaux : les grandeurs complexes associées sont soulignées (avec $j^2 = -1$).



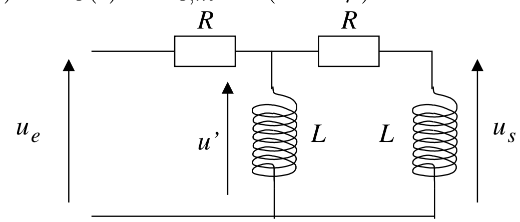
2.1 Choix d'un type de filtre

Quatre grands types de filtres sont disponibles : filtres passe-bas, passe-haut, coupe-bande et passe-bande.

1. Préciser, sans calcul, le type de filtre à utiliser pour ne « récupérer » que les signaux informatiques.
2. Même question pour les signaux « téléphoniques » (destinés à la conversation).
3. Donner, sans démonstration, un ordre de grandeur de la fréquence de coupure f_c nécessaire.

2.2 Étude d'un filtre

Soit le filtre suivant, constitué de deux conducteurs ohmiques identiques de résistance R et de deux bobines idéales identiques d'inductance L. La tension d'alimentation et la tension de sortie de ce quadripôle s'écrivent respectivement : $u_e(t) = U_{e,m}\cos(\omega t)$ et $u_s(t) = U_{s,m}\cos(\omega t + \varphi)$.



1. En dessinant un schéma équivalent en basse fréquence ($f \to 0$), puis en haute fréquence ($f \to +\infty$), déterminer, sans calcul, la nature (ou le type) de ce filtre. En déduire la nature des signaux que ce quadripôle laisse « passer ».

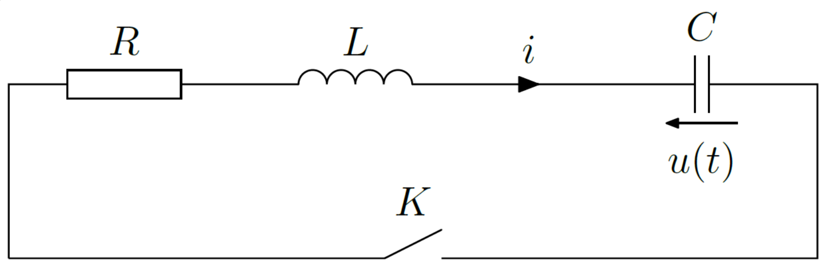
2. Exprimer, d'une part, la tension de sortie complexe u_s en fonction des grandeurs u', R et $\underline{Z}_L$ (impédance complexe de la bobine), puis, d'autre part, la tension complexe u' en fonction des grandeurs R, u_e et $\underline{Z}_L$.
3. Montrer que la fonction de transfert peut s'écrire :
$$\underline{H}(jx) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + a \times jx} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{R}{L}$$
avec a un nombre dont on précisera la valeur.
4. Donner les asymptotes de $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}(jx)|)$, le gain en décibel, pour $x \to 0$ et $x \to +\infty$, et sa valeur pour $x = 1$.
Rassembler ces résultats dans le tableau ci-dessous (tableau à recopier) :

Valeurs de x	$x \to 0$	$x = 1$	$x \to +\infty$
G_{dB} (décibels)			

5. En déduire le diagramme de Bode $G_{dB} = f(\log x)$ de ce filtre en faisant en particulier apparaître les asymptotes basse fréquence et haute fréquence.
6. Application numérique : $L = 1,40 \times 10^{-3}$ H ; $f_c = 1,50 \times 10^4$ Hz.
La valeur numérique de la pulsation réduite de coupure est établie par le calcul : $x_c = 2,67$. Calculer la résistance R des conducteurs ohmiques à utiliser pour fabriquer le filtre.

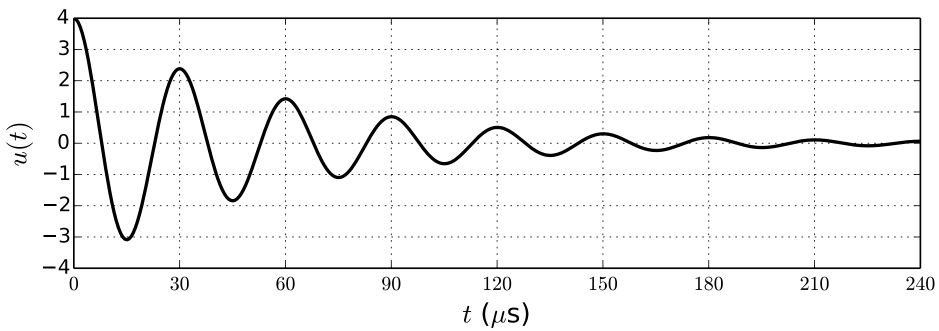
3 Amortissement d'un circuit RLC

On considère le circuit RLC série représenté sur la figure suivante. On définit les quantités suivantes : la pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.



L'interrupteur K est fermé à un instant $t = 0$ choisi comme origine des temps. Le condensateur est initialement chargé : $u(t = 0) = u_0$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t > 0$. On y fera apparaître ω_0 et Q. Préciser les différents régimes d'évolution possibles selon les valeurs de Q. On suppose $Q > 1/2$ dans la suite.
2. Résolution.
   (a) Établir l'expression de $u(t)$ pour $t \geq 0$, compte tenu des conditions initiales que vous expliciterez et justifierez.
   (b) Définir la pseudo-pulsation ω des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q. Définir aussi le temps caractéristique d'amortissement des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q.
3. On souhaite visualiser la tension $u(t)$ sur l'écran d'un oscilloscope dont l'entrée est modélisée par l'association en parallèle d'une résistance $R_0 = 1,0$ MΩ et d'une capacité $C_0 = 11$ pF.
   (a) Montrer que si l'on tient compte de l'oscilloscope, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ devient :
$$L(C + C_0)\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0\right)\frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u = 0$$
   (b) Quelles relations qualitatives doivent vérifier R, L, C, R_0 et C_0 pour que la mise en place de l'oscilloscope ait une influence négligeable sur les oscillations étudiées ? Vérifier qu'avec les valeurs usuelles de R, L et C utilisées en travaux pratiques ces relations sont vérifiées.
   (c) On définit le décrément logarithmique comme étant la quantité $d_m = \ln \dfrac{u(t)}{u(t + mT)}$ où $T = 2\pi/\omega$ et m est un entier strictement positif. Exprimer d_m en fonction de m et de Q.
   (d) On réalise un montage expérimental afin d'observer les oscillations libres du circuit RLC.
   La tension aux bornes du condensateur est enregistrée grâce à un logiciel d'acquisition. Le signal obtenu est représenté sur la figure suivante.



   En utilisant le décrément logarithmique, estimer le facteur de qualité Q.

4. On suppose $Q \gg 1$: la dissipation d'énergie par effet Joule est traitée comme une perturbation par rapport au cas du circuit non dissipatif ($R = 0$).

   (a) Dans le cas où $R = 0$, donner les expressions de $u(t)$ et $i(t)$. Établir alors l'expression de la valeur $\mathcal{E}$ de l'énergie électromagnétique stockée dans le circuit en fonction de U_0 et C.

   (b) Dans le cas où $R \neq 0$, en admettant que la relation précédente peut être appliquée en remplaçant U_0 par $u(t)$ du régime pseudo-périodique dans la formule de l'énergie électromagnétique ; montrer qu'en première approximation, l'énergie W_J dissipée par effet Joule dans le circuit RLC, pendant une période, vérifie la relation :

   $$W_J = \frac{2\pi}{Q}\mathcal{E}$$

   <u>Indication</u> : pour $\varepsilon \ll 1$, on pourra admettre $\exp(\varepsilon) \simeq 1 + \varepsilon$.