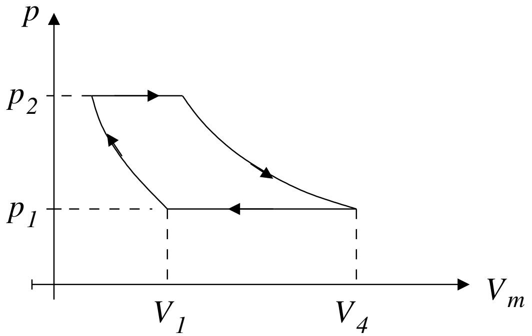
Devoir non surveillé n°10 (CCP, MP 2012 (correction))

Cycle de Brayton

1. Pour la transformation isentropique d'un gaz parfait, on peut appliquer la loi de la Laplace $pV^\gamma = cste$; en combinant cette relation avec celle du gaz parfait, on en déduit :
$$pV^\gamma = p\left(\frac{nRT}{p}\right)^\gamma = (nR)^\gamma \frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}}$$
On en déduit :
$$\frac{T}{p^\beta} = cste \quad \text{avec} \quad \boxed{\beta = \frac{\gamma-1}{\gamma} = 0,4}$$

2. On applique la loi de Laplace pour la transformation isentropique de 1 à 2 :
$$\frac{T_1}{p_1^\beta} = \frac{T_2}{p_2^\beta} \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\beta \quad \text{donc} \quad \boxed{T_2 = 300 \times 4^{0,4} = 522\ \text{K}}$$
De même : $T_4 = T_3\left(\frac{p_4}{p_3}\right)^\beta = 1300/4^{0,4}$ donc $\boxed{T_4 = 747\ \text{K}}$

3. Cycle :



4. On applique le premier principe industriel pour les transformations 12 et 34 adiabatiques, le travail utile s'identifie à la variation d'enthalpie :
$$\boxed{W_{12} = \Delta H = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1)} \quad \text{et} \quad \boxed{W_{34} = \Delta H = \frac{5}{2}nR(T_4 - T_3)}$$
Application numérique :
$$W_{12} = \frac{5}{2} \times 8,314\,(522 - 300) = \underline{4,61\ \text{kJ}}$$
$$W_{34} = \frac{5}{2} \times 8,314\,(747 - 1300) = \underline{-11,5\ \text{kJ}}$$

5. Pour les transformations isobares, en l'absence de travail utile, le transfert thermique s'identifie à la variation d'enthalpie :
$$\boxed{Q_{23} = \Delta H = \frac{5}{2}nR(T_3 - T_2)} \quad \text{et} \quad \boxed{Q_{41} = \Delta H = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_4)}$$
Application numérique :
$$Q_{23} = \frac{5}{2} \times 8,314\,(1300 - 522) = \underline{16,2\ \text{kJ}}$$
$$Q_{41} = \frac{5}{2} \times 8,314\,(300 - 747) = \underline{-9,3\ \text{kJ}}$$

6. Pour un moteur, la grandeur utile est l'opposé du travail reçu sur le cycle : $-W = -(W_{12} + W_{34})$, le coût est représenté par l'apport thermique Q_{23} fournie par la source chaude :
$$e = -\frac{W_{12} + W_{34}}{Q_{23}} = -\frac{T_2 - T_1 + T_4 - T_3}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$
Compte tenu des résultats précédents : $T_3 = r_p^\beta T_4$ et $T_2 = T_1 r_p^\beta$:
$$\boxed{e = 1 - \frac{1}{r^\beta}}$$

7. Application numérique : $\boxed{e = 1 - 1/4^{0,4} = 43\%}$

Dans le cas d'un cycle de Carnot (machine réversible) :
Pour un moteur, l'efficacité est toujours définie par :
$$e = \frac{-W}{Q_C} = \frac{Q_F + Q_C}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$$
Dans le cas d'un fonctionnement réversible : $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0$, on en déduit :
$$e = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$
Pour le cycle considéré, $T_C = T_3$ et $T_F = T_1$ donc :
$$\boxed{e = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{300}{1300} = 0,77}$$

8. Le travail reçu sur le cycle est la somme des deux travaux reçus W_{12} et W_{34} :
$$W = W_{12} + W_{34} = \frac{5}{2}nR\,(T_2 - T_1 + T_4 - T_3) = \frac{5}{2}nR\left(T_1 r_p^\beta - T_1 + \frac{T_3}{r_p^\beta} - T_3\right)$$
$$\boxed{W = \frac{5}{2}nR\left[T_1\left(r_p^\beta - 1\right) + T_3\left(\frac{1}{r_p^\beta} - 1\right)\right]}$$

9. Comme le travail reçu est négatif, il s'agit d'étudier la fonction :

$$f(x) = T_1\,(1-x) + T_3\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

On cherche $f'(x) = -T_1 + \dfrac{T_3}{x^2} = 0$ c'est à dire $x_m = r_{pm}^{\beta} = \left(\dfrac{T_3}{T_1}\right)^{1/2}$ donc :

$$\boxed{r_{pm} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\dfrac{1}{2\beta}}}$$

Application numérique :

$$r_{pm} = \left(\frac{1300}{300}\right)^{\dfrac{1}{2\times 0,4}} = 6,25 \quad \text{et} \quad \boxed{e = 1 - 1/6,25^{0,4} = 0,52}$$

Cycle de Brayton avec régénérateur

1. Sachant que $T_x = T_4$ et $T_y = T_2$ et que le transfert thermique s'identifie à la variation d'enthalpie :

$$\boxed{Q_{x3} = \Delta H = \frac{5}{2} nR(T_3 - T_4)} \quad \text{et} \quad \boxed{Q_{y1} = \Delta H = \frac{5}{2} nR(T_1 - T_2)}$$

2. L'efficacité est définie comme dans la partie précédente mais le transfert thermique fournit par la source chaude n'est plus Q_{23} mais Q_{x3} :

$$e = -\frac{W_{12} + W_{34}}{Q_{x3}} = -\frac{T_2 - T_1 + T_4 - T_3}{T_3 - T_4} = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4} = 1 - \frac{T_1 r_p^{\beta} - T_1}{T_3 - T_3/r_p^{\beta}}$$

$$e = 1 - \frac{T_1}{T_3}\left(\frac{r_p^{\beta} - 1}{1 - 1/r_p^{\beta}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^{\beta}}$$

Application numérique :

$$\boxed{e = 1 - \frac{300}{1300} \times 4^{0,4} = 0,60}$$

3. On cherche la valeur de r_p tel que :

$$1 - \frac{T_1}{T_3} r_{pe}^{\beta} = 1 - \frac{1}{r_{pe}^{\beta}} \quad \text{donc} \quad \boxed{r_{pe} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\dfrac{1}{2\beta}}}$$

Précédemment on a obtenu : $T_3 = r_p^{\beta} T_4$ et $T_2 = T_1 r_p^{\beta}$, ce qui donne, avec $r_p = r_{pe}$:

$$\frac{T_2}{T_4} = \frac{T_1 r_{pe}^{\beta}}{T_3/r_{pe}^{\beta}} = \frac{T_1}{T_3} r_{pe}^{2\beta} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{T_4 = T_2}$$

4. Application numérique :

$$\boxed{r_{pe} = \left(\frac{1300}{300}\right)^{1/0,8} = 6,25}$$

Pour atteindre l'efficacité de Carnot il faudrait que $e = 1 - \dfrac{T_1}{T_3} r_p^{\beta} \to 1 - \dfrac{T_1}{T_3}$.

Il faudrait donc que $\boxed{r_p \to 1}$. Comme r_p est le rapport de compression, il faudrait étager la compression en des compressions de rapport plus faible, de même pour la détente.